特殊相対性理論の数学的基礎

大阪市立大学名誉教授
理学博士
河合俊治 著

裳 華 房

MATHEMATICAL FOUNDATIONS

OF

THEORY OF SPECIAL RELATIVITY

by

Toshiharu KAWAI, DR. SC.

SHOKABO

TOKYO

序

周知のように，特殊相対性理論は Albert Einstein によって 20 世紀初頭に提唱されたもので，一般相対性理論，量子力学と共に現代物理学の基礎を成している．特殊相対論[A)] を基礎の 1 つにおく素粒子物理学の成功をはじめとして，現代物理学の状況は「この理論は，真の重力が無視できる対象について高精度で成り立っている」ことを保証している．

特殊相対論は確立された理論であるが，このことはプレゼンテーションや理解の仕方まで確立されていることを意味するものではない．この理論に関しては,「物理現象の加速度系による記述は特殊相対論の枠外である」,「双子のパラドックスの解決のためには一般相対論が入用である」,「特殊相対論では，加速度運動を扱うことはできない」等の誤解に接することが多い．

このような状況は,「特殊相対論は，取り扱う座標系を慣性系（とよばれる特定の種類のもの）に限定して，慣性系間の変換である Lorentz 変換のもとでかくかくの変換性を示す量としてテンソルを導入して，それに基づいて定式化されていることが多い」,「特殊相対論を使う立場からは，不十分な理解のままでも不都合が表面化しないことが多い」等の事情からきているものと思われる．

しかし，これは決して好ましいことではないのであって,「この種の誤解の根を元から絶ちたい」というのが本書執筆の主要な動機である．

本書のタイトルは J. L. von Neumann による古典的名著「Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik」に倣ったものである．出来栄えや学問的位置づけという点ではこの名著と比べるべくもないが，本書の目標は「特殊相対論の基底無依存，座標系無依存な定式化（= 一般相対性原理に

A）本書においては，相対性理論という語の代わりに相対論という略語を頻繁に用いる．

基づく特殊相対論の定式化）を通じてこの理論の本質を明示すること」にあり,「物理学の基底無依存，座標系無依存な定式化」という思想性において本書はNeumannの前掲書と軌を一にするものと考える．目標を達成するための準備としての数学の記述に多くの頁を割くこととなったが，ここに「物理学の理論においては数学が基本的な役割を果たしている」ことの典型を見ることができる．Galileiもいうように,「自然という書物は数学の言葉で書かれている」のである．

本書は,「特殊相対論については，物理学科で通例学ぶ程度のことは理解しているが，テンソル，テンソル場，微分形式等の理論の基底無依存，座標系無依存な定式化については不慣れな人」を主要な読者層として想定している．数学的な予備知識としては，理工系の学生が学部の低学年で学ぶ程度の，線型代数，微分積分，ベクトル解析等を前提としている.「一般相対論の視点から特殊相対論を捉え直したい学生・研究者」,「特殊相対論の数学的構造に関心のある学生・研究者」の諸氏をも含めて「特殊相対論の現代的教程」を望む方々に本書がお役に立てるようにと願っている．

大阪市立大学大学院理学研究科の石原秀樹教授からは，第3章と第4章の記述に関して貴重な助言を頂いた．厚く御礼申し上げる．

本書執筆のお約束をしたのは，私が大阪市立大学在職中の1995年のことであり，以来，10年もの歳月が経ってしまった．この間，日本の大学は激変の時期を迎え，私自身も大学院の再編に関わるなど，多忙な日々が続いた．この忙しさと私の生来の遅筆が重なって，出版前に大学を定年退職する羽目になってしまった．筆の進まない私を辛抱強く見守って下さった裳華房 企画・編集部の小野達也氏およびすでに退職された元 企画部長の真喜屋実孜氏に深くお詫びと感謝の意を表したい．とりわけ，小野氏は，原稿の仕上げに際して事細かに相談にのり，また多くの労をとって下さった．重ねて御礼申し上げる．

2005年10月

河　合　俊　治

本書の構成と概要

本文に入る前に，本書の構成と概要を述べておこう．

特殊相対論では,「時間と空間は別々のものではなく，両方が合わさって4次元のMinkowski時空を構成していて,物理法則は時空におけるテンソル量の間の方程式である」ことを基本的前提としている．このことを定式化する際に必要な数学的事項を最初の3つの章で与える．第4章で，**Newton力学（古典力学）および電磁気学の3次元形式の分析を通じて電磁気学の法則からMinkowski時空を読みとり，それに基づいて電磁気学および力学の相対論的定式化を与える**．第5章では，光源も観測者も任意の運動をしている場合のDoppler効果，一様加速度運動，見かけの距離，剛体運動する物体の短縮など，重要ではあるが入門書の多くでは詳しくは扱われていない事項について述べる．

曲面†) とその上での微分形式の議論にかなりのページを割くことになり，そのために記述がやや難しくなってしまったきらいがある．Minkowski時空は“平坦な”空間であり，この限りでは曲面という概念は不要と思われるかもしれないが，相対論的場の理論においては時空の部分空間である空間的超曲面が重要な役割を果たす．電磁場の理論は相対論的場の理論の実例であり，本書においても空間的超曲面上の電気量，エネルギー運動量等を考えることになる.「数学的に細かなことは（とくに曲面上の積分のところでは）あまり気にせずに“概要を一通り理解できればよい”といった気楽な気持ちで読み通して，“時間に余裕のあるときに数学的にもきちんと理解する”という方針でゆく」のも一法と思う．

第4章においては電磁気学の分析に多くのページを割くことになるが，これは「特殊相対論は古典電磁気学の理論的整備を直接の契機として創成

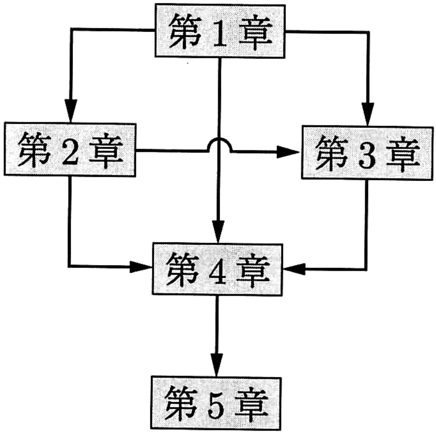
---

†) 一般相対論において重要な多様体は，曲面を一般化したものである．

された」という歴史的経緯があり,「この理論を現代的視点に立って解説する際にも，このような書き方をすることが理論の動機や内容を理解する上で適切であろう」と考えるからである.

物理学としての筋道を見えやすくするためとページ数の節約のため，命題の証明については，ひとまわり小さな文字を用い，また,「命題のうち，その証明がやや長いものや，内容を把握しておればとりあえずはその証明を知らなくてもよいと思われる幾つかのもの[‡]」については，それらの証明を付録 **A** としてまとめて与えることにした．また，集合，写像，2 項関係，群，体，置換群，位相，$\mathcal{R}^n$ 上の解析学（逆写像定理など）については，本文を読む際に必要な最小限のことを命題の証明は抜きで付録 **B** に与えてある．証明や詳しいことについては，関連する文献を見て頂きたい．巻末に，本書を執筆するに当たって参照した文献，あるいは本書と併せて読むことをお薦めする文献を挙げる．中には，現在入手し難いものもあるが，大学図書館などで探して頂きたい.

各章間の関係の大略を図示する：



[‡] 本文中で証明が与えられていない命題であって,「容易に証明されるように次の命題が成り立つ」,「次の命題の証明は読者の演習問題としよう」,「証明については，文献 [⋆⋆] を参照」というような証明についての何らかのコメントもないものがそれである.

目次

第1章　線型空間とテンソル

この章では，線型代数の基礎事項のうち，後章で必要になる部分を中心に述べる．線型空間は，群，体の概念をその基礎においている[1]．線型汎関数およびその一般化である多重線型形式の概念を通じてテンソルを導入し，その特別な場合としての交代テンソルについて外積を定義する．これらは第3章における微分形式の理論の基礎になる．また，Euclid 計量，Minkowski 計量を特別な場合として含む一般的な計量の概念を導入する．特殊相対論においては，Minkowski 計量の定義された4次元線型空間が重要な役割を果たす．

強調しておきたいことは，「本書では**基底の変換に依拠することなくテンソルを導入する**」ということである．

1.1　線型空間

実数体上の線型空間，すなわち実数を係数とする線型空間を導入する．

1.1.1　線型空間

実数体 $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{R; +, \times\}$ 上の線型空間を以下のように定義する．

定義 1.1.1. $\vec{u}, \vec{v}$ を**集合** V の任意の2元，a を任意の実数とするとき，和 $\vec{u} \oplus \vec{v} \in V$ および $\vec{u}$ の a 倍 $a \cdot \vec{u} \in V$ が共に一意的に定まり下記の条件 **[L1]**，**[L2]** がすべて満足されるとき，系 $\mathcal{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{V, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ のことを

1）群，体についての基礎的事項を付録 **B** の **B.2** 節にまとめてある．なお，群や体はそれ自身としても重要である．とくに，群は物理学の諸分野で基本的役割を担っている．特殊相対論に直結している群としては，斉次および非斉次の Lorentz 群がある．

体 $\mathcal{R}$ 上の**線型空間**あるいは実数を係数とする線型空間といい，集合 V の元，集合 R の元（すなわち実数）のことを，それぞれ**ベクトル**および**スカラー**という：

[L1] 系 $\{V; \oplus\}$ は**可換群**である．

[L2] R の任意の元 a, b，V の任意の元 $\vec{u}, \vec{v}$ に対して，以下の関係がすべて成り立つ：

[L2A] $(a+b)\cdot\vec{u} = a\cdot\vec{u}\oplus b\cdot\vec{u}$

[L2B] $a\cdot(\vec{u}\oplus\vec{v}) = a\cdot\vec{u}\oplus a\cdot\vec{v}$

[L2C] $(a\times b)\cdot\vec{u} = a\cdot(b\cdot\vec{u})$

[L2D] $1\cdot\vec{u} = \vec{u}$

群 $\{V; \oplus\}$ において，**単位元**を**零ベクトル**とよび $\vec{0}$ と記し，ベクトル $\vec{u}$ の**逆元**を $-\vec{u}$ と記す．また，$\vec{u}-\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{u}\oplus(-\vec{v})$ によってベクトルの差 $\vec{u}-\vec{v}$ を定義する．線型空間 $\mathcal{V} = \{V, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ における演算 $\oplus$ については**結合律** $\vec{u}\oplus(\vec{v}\oplus\vec{w}) = (\vec{u}\oplus\vec{v})\oplus\vec{w}$ が成り立つから，この式の両辺の量のことを $\vec{u}\oplus\vec{v}\oplus\vec{w}$ と記してもよい．4 個以上のベクトルの和についても同様である．さらに演算 $\oplus$ は可換であるから，ベクトル $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m$ について

$$\sum_{\mu=1}^{m}\vec{u}_\mu = \vec{u}_1\oplus\cdots\oplus\vec{u}_m \tag{1.1}$$

という記法が許される．以下では，実数体上の線型空間のことを単に線型空間とよぶことにする．

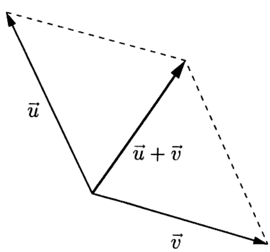


図 1.1　ベクトルの和

線型空間の例をいくつか挙げよう.

実数体 $\mathcal{R} = \{R; +, \times\}$ について $\{R, R; +, \times, +, \times\}$ を考えると，これは線型空間である．このことは体 $\mathcal{R}$ と線型空間 $\{R, R; +, \times, +, \times\}$ とを同一視できることを示している.

$a^1, \cdots, a^n$ を任意の実数として，これらの組 $(a^1, \cdots, a^n)$ の全体の集合[2)]

$$R^n \overset{\text{def}}{=} \{(a^1, \cdots, a^n) | a^\mu \in R,\ \mu = 1, 2, \cdots, n\} \tag{1.2}$$

を考える．c を任意の実数，$(a^1, \cdots, a^n), (b^1, \cdots, b^n)$ を R^n の任意の 2 元として，演算 $\oplus$ と $\cdot$ を

$$\left.\begin{aligned} &(a^1, \cdots, a^n) \oplus (b^1, \cdots, b^n) \overset{\text{def}}{=} (a^1 + b^1, \cdots, a^n + b^n) \\ &c \cdot (a^1, \cdots, a^n) \overset{\text{def}}{=} (c \times a^1, \cdots, c \times a^n) \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

により定義すると，$\mathcal{R}^n \overset{\text{def}}{=} \{R^n, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ は線型空間である．線型空間 $\mathcal{R}^n$ およびその元のことを，それぞれ**数ベクトル空間**，**数ベクトル**という.

実数を要素とする m 行 n 列の行列全体の集合を $M(m,n)$ として $\mathcal{R}^n$ の場合におけるのと同様にして演算 $\oplus$, $\cdot$ を定義すると，$\mathcal{M}(m,n) \overset{\text{def}}{=} \{M(m,n), R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ は線型空間である.

x を実変数，n を非負の整数として n 次多項式全体の集合 $P_n(x) \overset{\text{def}}{=} \{a(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \times x^\nu | a_\nu \in R,\ \nu = 0, 1, \cdots, n\}$ を考え，和の演算 $\oplus$，スカラー倍の演算 $\cdot$ を次のように定義する：

$$\left.\begin{aligned} &a(x) \oplus b(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu + b_\nu) \times x^\nu \\ &\forall a(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \times x^\nu,\ \ b(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \times x^\nu \in P_n(x) \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

$$\left.\begin{aligned} &k \cdot a(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=0}^{n} k \times (a_\nu \times x^\nu), \quad \forall k \in R \\ &\forall a(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \times x^\nu \in P_n(x) \end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

このとき，$\mathcal{P}_n(x) \overset{\text{def}}{=} \{P_n(x), R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ は線型空間である.

2) $A \overset{\text{def}}{=} B$ は,「B のことを A と定義する」を意味する.

素朴な直観では，ベクトルとは空間の 1 点から他の点へ向けて引かれた矢印のことであり，それらの集まりがつくるものが線型空間（ベクトル空間）である．定義 1.1.1 は，それらのもつ属性を抽象化することによってなされたものである．これにより n 次多項式の全体がつくる線型空間が考えられ，多項式がベクトルと見なされることになる．

容易に示されるように，次の命題が成り立つ．

命題 1.1.1. 線型空間 $\mathcal{V} = \{V, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ について以下のことが成り立つ： a を任意のスカラー，$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{u}$ を任意のベクトルとすると，

（1）　$\vec{\alpha} \oplus \vec{u} = \vec{\beta}$ ならば $\vec{u} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$

（2）　$0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

（3）　$(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

（4）　$a \cdot \vec{0} = \vec{0}$

（5）　$\vec{\alpha} \oplus \vec{u} = \vec{\alpha}$ ならば $\vec{u} = \vec{0}$

（6）　$\vec{\alpha} \oplus \vec{u} = \vec{0}$ ならば $\vec{u} = -\vec{\alpha}$

（7）　$(-a) \cdot \vec{u} = -a \cdot \vec{u}$

定義 1.1.2. 線型空間 $\mathcal{V} = \{V, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ において，S を V の**部分集合**とする．系 $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{S, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ が線型空間であるとき，$\mathcal{S}$ を $\mathcal{V}$ の**部分線型空間**という．

ここで，$\mathcal{S}$ における演算 $+$, $\times$, $\oplus$, $\cdot$ は，それぞれ $\mathcal{V}$ における対応する演算と同一であることに注意しよう．次の命題は基本的である．

命題 1.1.2. 線型空間 $\mathcal{V} = \{V, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ において，S を V の部分集合とする．系 $\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \{S, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ が $\mathcal{V}$ の部分線型空間であるための必要十分条件は，任意のスカラー a，S の任意の 2 元 $\vec{u}, \vec{v}$ について，$a \cdot \vec{u} \in S$, $\vec{u} \oplus \vec{v} \in S$ であることである．

定義 1.1.3. 線型空間 $\mathcal{V}$ において，$c^1, \cdots, c^m$ をスカラー，$\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m$ をベクトルとして，

$$\vec{u} = \sum_{\mu=1}^{m} c^\mu \cdot \vec{u}_\mu \tag{1.6}$$

の形で与えられるベクトル $\vec{u}$ を $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m$ の**線型結合**という．ただし，m は自然数（正の整数）とする．

線型空間 $\mathcal{V} = \{V, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ において，V の空でない部分集合 S の元すべての線型結合の集合を $[S]$ と表して $[\mathcal{S}] \stackrel{\text{def}}{=} \{[S], R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ とすると，命題 1.1.2 によって明らかなように $[\mathcal{S}]$ は $\mathcal{V}$ の部分線型空間である．$[\mathcal{S}]$ のことを，S によって**張られる部分線型空間**という．

$\mathcal{S} = \{S, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$, $\mathcal{T} = \{T, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ を共に線型空間 $\mathcal{V}$ の部分線型空間とする．$S + T \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{s} \oplus \vec{t} \,|\vec{s} \in S,\ \vec{t} \in T\}$, $S \cap T \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{v} | \vec{v} \in S,\ \vec{v} \in T\}$ とおいて，$\mathcal{S} + \mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{S + T, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ および $\mathcal{S} \cap \mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{S \cap T, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ とする．命題 1.1.2 を用いて証明されるように，$\mathcal{S} + \mathcal{T}$ と $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ は共に $\mathcal{V}$ の部分線型空間である．とくに $S + T = V$, $S \cap T = \{\vec{0}\}$ であるとき $\mathcal{V}$ は $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ との**直和**であるといい，$\mathcal{V} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{T}$ と表し，この表示を $\mathcal{V}$ の $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ への**直和分解**という．

命題 1.1.3. $\mathcal{V} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{T}$ であるための必要十分条件は，$\mathcal{V}$ の任意のベクトル $\vec{v}$ が，$\vec{s}, \vec{t}$ をそれぞれ $\mathcal{S}$ のベクトルおよび $\mathcal{T}$ のベクトルとして，$\vec{v} = \vec{s} \oplus \vec{t}$ と一意的に表されることである．

記号の簡略化

線型空間 $\mathcal{V} = \{V, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ において，実数同士の加法の演算 $+$ とベクトル同士の加法の演算 $\oplus$ とは別のものである．また，実数同士の積の演算 $\times$ とベクトルに実数を乗ずる演算 $\cdot$ とは別のものである．本書では，異なる「加法」,「乗法」の演算が種々現れる．これらすべてに異なる記号を宛がうと，記号の数（かず）がやたらに増えて，煩雑極まりないことになってしまう．以下においては，**「混乱，誤解が生じない」と思われる状況下では，適宜記号の簡略化を行う**．

ベクトルの和 $\vec{u} \oplus \vec{v}$，ベクトルのスカラー倍 $a \cdot \vec{u}$，および実数 a, b の積 $a \times b$ のことを，それぞれ $\vec{u} + \vec{v}$, $a\vec{u}$ および ab と表すことにする．一般には任意の体上の線型空間が定義されるが，本書においては実数体上の線型空間しか登場しないこともあり，系 $\mathcal{V}$ と集合 V とをほとんどの場面で記号上は区別せず，$\mathcal{V} = \{V, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ のことを単に V と表す．同様に，

体 $\mathcal{R} = \{R; +, \times\}$，線型空間 $\{R, R; +, \times, +, \times\}$ のことは共に R と表し，数ベクトル空間 $\mathcal{R}^n = \{R^n, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ のことを R^n と表す．線型空間 $\mathcal{M}(m,n)$, $\mathcal{P}_n(x)$ についても同様の略記法を用いる．また，ギリシャ文字 ν はベクトルの**添数**（てんすう）を表すのにも光の振動数を表すのにも用いられるなど，**同一記号を全く異なる意味に用いることもある．各記号が使われている場面に応じて，適宜その意味を弁別して頂きたい**．

1.1.2　線型独立性と次元

(1.6) における線型結合 $\vec{u}$ について，$\vec{u} = \vec{0}$ であるのは $(c^1, \cdots, c^m) = (0, \cdots, 0)$ のときに限る場合，ベクトルの組 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m\}$ は**線型独立**であるという．$\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_m\}$ が線型独立でないことを**線型従属**であるという．

線型独立なベクトルの集合の任意の部分集合は線型独立である．また，ベクトルの集合が線型従属な部分集合を含むならば，その集合は線型従属である．

線型空間 V において，

(D1)　$V = \{\vec{0}\}$ であるとき，V は **0 次元**であるといい，$\dim V = 0$ と記す．

(D2)　V に線型独立な n 個のベクトルが存在してかつ $n+1$ 個以上の線型独立なベクトルは存在しないとき，V は **n 次元**であるといい $\dim V = n$ と記す．ただし，n は自然数とする．

$\dim V = 0$ または $\dim V = n$ であるとき，V は**有限次元**であるといい，有限次元でない線型空間 V は**無限次元**であるという．以下，とくに断らない限り，**扱っている線型空間はすべて有限次元であるものとする**．

$\dim V = n$, $n \geq 1$ であるとき，V の線型独立な n 個のベクトルの組 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ のことを V の**基底**という．

命題 1.1.4. 線型空間 V のベクトルの組 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ がこの空間の基底であるための必要十分条件は，この組が線型独立であって，かつ V の任意のベクトルが $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ の線型結合として表されることである．

証明：十分条件であること：$\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ が線型独立であって，かつ V の任意のベクトル $\vec{u}$ が $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n$ の線型結合として，(1.6) の形に表されるものとする．

これより，

$$\sum_{\mu=1}^{n} c^{\mu}\vec{u}_{\mu} + (-1)\vec{u} = \vec{0}, \quad c^{\mu} \in R \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.7}$$

となる．ゆえに，組 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n, \vec{u}\}$ は線型独立ではない．したがって，線型空間の次元および基底の定義により，$\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ は V の基底である．

必要条件であること：$\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ が V の基底であるものとすると，この組は線型独立であり，また V の任意のベクトル $\vec{u}$ に対して組 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n, \vec{u}\}$ は線型従属である．したがって，$(c^1, \cdots, c^n, c) \neq (0, \cdots, 0, 0)$ なる実数 c^{μ} $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$，c に対して

$$\sum_{\mu=1}^{n} c^{\mu}\vec{u}_{\mu} + c\vec{u} = \vec{0} \tag{1.8}$$

である．ここで仮に $c = 0$ としてみると，(1.8) は

$$\sum_{\mu=1}^{n} c^{\mu}\vec{u}_{\mu} = \vec{0} \tag{1.9}$$

となる．すると $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ が線型独立であることにより，すべての $\mu = 1, 2, \cdots, n$ に対して $c^{\mu} = 0$ が帰結する．これは，組 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n, \vec{u}\}$ が線型従属であることと矛盾する．したがって，$c \neq 0$ である．そこで，(1.8) の両辺に左から c^{-1} を掛けて適宜移項することにより

$$\vec{u} = \sum_{\mu=1}^{n} a^{\mu}\vec{u}_{\mu}, \quad a^{\mu} \overset{\text{def}}{=} -c^{-1}c^{\mu} \in R \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.10}$$

が得られ，任意のベクトル $\vec{u}$ が $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ の線型結合として表されることがわかる．以上により必要条件であることが示された．

数ベクトル空間 R^n は n 次元であり，数ベクトル $\vec{\varDelta}_1 \overset{\text{def}}{=} (1, 0, \cdots, 0)$，$\cdots, \vec{\varDelta}_n \overset{\text{def}}{=} (0, \cdots, 0, 1)$ の組 $\{\vec{\varDelta}_1, \cdots, \vec{\varDelta}_n\}$ は基底である．この基底を R^n の**自然基底**という．また，m 行 n 列の行列がつくる線型空間 $M(m, n)$ は mn 次元であって，$E^{\mu}{}_{\nu}$ を μ 行 ν 列要素が 1 で他の要素はすべて 0 である m 行 n 列の行列とすると，$\{E^{\mu}{}_{\nu} | \mu = 1, 2, \cdots, m,\ \nu = 1, 2, \cdots, n\}$ は $M(m, n)$ の基底である．また，線型空間 $P_n(x)$ において，$\dim P_n(x) = n + 1$ であり，$\{1, x, \cdots, x^n\}$ はこの線型空間の基底である．

命題 1.1.5. $n \stackrel{\text{def}}{=} \dim V$ とおき，$\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ を V の基底とする．任意のベクトル $\vec{u}$ は，$\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ の線型結合として一意的に表される：

$$\vec{u} = \sum_{\mu=1}^{n} a^{\mu} \vec{u}_{\mu} \tag{1.11}$$

証明： $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ を V の基底とすると，命題 1.1.4 により任意のベクトル $\vec{u}$ は，この組の線型結合として表される．その表し方の一意性を示そう．

$$\vec{u} = \sum_{\mu=1}^{n} a^{\mu} \vec{u}_{\mu} = \sum_{\mu=1}^{n} a'^{\mu} \vec{u}_{\mu}, \ \ a^{\mu}, a'^{\mu} \in R \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.12}$$

とすると，

$$\sum_{\mu=1}^{n} (a^{\mu} - a'^{\mu}) \vec{u}_{\mu} = \vec{0} \tag{1.13}$$

となる．$\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ は線型独立であるから $a^{\mu} = a'^{\mu}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$ が得られ，命題が成り立つことがわかる．

$\{a^1, \cdots, a^n\}$ のことを，ベクトル $\vec{u}$ の基底 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ に関する**成分**といい，また各 a^{μ} のことを $\vec{u}_{\mu}$ 成分という．

$\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$, $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ を V の 2 つの基底とする．前命題によれば，$\vec{u}_{\mu}$ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$ は $\vec{v}_{\nu}$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ の線型結合として一意的に表される：

$$\vec{u}_{\mu} = \sum_{\nu=1}^{n} K^{\nu}{}_{\mu} \vec{v}_{\nu}\ , \qquad K^{\nu}{}_{\mu} \in R \tag{1.14}$$

命題 1.1.6. (1.14) における行列 $K \stackrel{\text{def}}{=} (K^{\nu}{}_{\mu})$ は正則行列である．

証明： c^{μ} $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$ を実数として $\sum_{\mu=1}^{n} c^{\mu} \vec{u}_{\mu} = \vec{0}$ とする．(1.14) を用いると，$\sum_{\mu=1}^{n} c^{\mu} \left(\sum_{\nu=1}^{n} K^{\nu}{}_{\mu} \vec{v}_{\nu} \right) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\sum_{\mu=1}^{n} c^{\mu} K^{\nu}{}_{\mu} \vec{v}_{\nu} \right) = \vec{0}$ となる．$\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ は線型独立であるから，c^{μ} についての連立方程式 $\sum_{\mu=1}^{n} c^{\mu} K^{\nu}{}_{\mu} = 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n)$ が帰結する．$\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_n\}$ は線型独立であるから，$\sum_{\mu=1}^{n} c^{\mu} \vec{u}_{\mu} = \vec{0}$ が成り立つのは $(c^1, \cdots, c^n) = (0, \cdots, 0)$ のときに限る．ところで，先の連立方程式の解が $(c^1, \cdots, c^n) = (0, \cdots, 0)$ のみであるための必要十分条件は，K が正則行列であることである．したがって，命題が成り立つ．

1.1.3 線型写像

線型空間 V, W において，V から W の中への**写像** f が任意の実数 a, b, V の任意の元 $\vec{u}, \vec{v}$ に対して次の条件を満足するとき，f は**線型写像**（あるいは**準同型写像**）であるという：

$$f(a\vec{u} + b\vec{v}) = af(\vec{u}) + bf(\vec{v}) \tag{1.15}$$

とくに $V = W$ である場合，f は V の**線型変換**であるという．f の**値域**が W であるとき，f は V から W の上への線型写像であるといい，V から W の上への 1 対 1 線型写像を**線型同型写像**という．また，線型空間 V から W の上への線型同型写像が存在するとき，V と W は**線型同型**であるといい，V から V の上への線型同型写像を V の**正則線型変換**という．

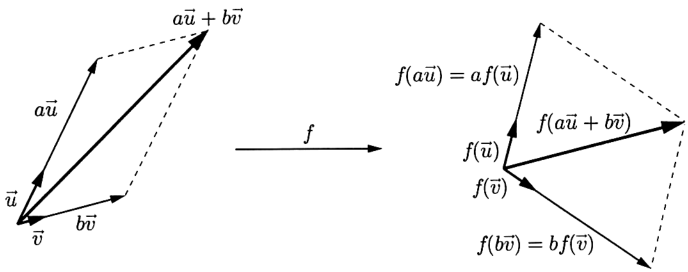


図 1.2 線型写像

命題 1.1.7. 2 つの線型空間 V と W が線型同型であるための必要十分条件は $\dim V = \dim W$ であることである．

この命題と $\dim R^n = n$ であることから明らかなように，任意の n 次元線型空間と数ベクトル空間 R^n は線型同型である．また，R^1 と線型空間 R は線型同型である．

次の命題は，線型写像の全体もまた線型空間をつくることを示している．

命題 1.1.8. 線型空間 V から線型空間 W の中への線型写像の全体の集合を $L(V,W)$ と記す．a を任意の実数，f,g を $L(V,W)$ の任意の元として

$$(f \boxplus g)(\vec{u}) \overset{\text{def}}{=} f(\vec{u}) + g(\vec{u}), \quad (a \boxtimes f)(\vec{u}) \overset{\text{def}}{=} af(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in V \tag{1.16}$$

により演算 $\boxplus$ と $\boxtimes$ を定義すると，$\mathcal{L}(V,W) \overset{\text{def}}{=} \{L(V,W), R; +, \times, \boxplus, \boxtimes\}$ は線型空間である．

命題 1.1.9. $\dim V = m$, $\dim W = n$ とすると $\dim L(V,W) = mn$ である．

証明: $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m\}$ を V の基底，$\{\vec{h}_1, \cdots, \vec{h}_n\}$ を W の基底とする．$f \in L(V,W)$ に対して $f(\vec{e}_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \cdots, m)$ を考えると，これらは W の元であるから，

$$f(\vec{e}_\nu) = \sum_{\mu=1}^{n} f^\mu{}_\nu \vec{h}_\mu, \quad f^\mu{}_\nu \in R \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n,\ \nu = 1, 2, \cdots, m) \tag{1.17}$$

と一意的に表される．$f^\mu{}_\nu$ を μ 行 ν 列の要素とする n 行 m 列の行列 $(f^\mu{}_\nu) \in M(n,m)$ を考えて，

$$\Lambda^n{}_m(f) \overset{\text{def}}{=} (f^\mu{}_\nu), \quad \forall f \in L(V,W) \tag{1.18}$$

により写像 $\Lambda^n{}_m : L(V,W) \to M(n,m)$ を定義する．$\Lambda^n{}_m$ は $L(V,W)$ から $M(n,m)$ の上への線型同型写像である．ところで，$\dim M(n,m) = mn$ であるから，命題 1.1.7 により $\dim L(V,W) = mn$ となる．

上の証明から明らかなように，次の命題が成り立つ．

命題 1.1.10. 線型空間 V から線型空間 W への線型写像は，V の任意に選んだ 1 つの基底への作用によって一意的に決定される．

(1.17) によって定まる行列 $(f^\mu{}_\nu)$ を，線型写像 $f : V \to W$ の基底 $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m\}$, $\{\vec{h}_1, \cdots, \vec{h}_n\}$ による**表現行列**という．

命題 1.1.11. U, V, W を線型空間とするとき，線型写像 $f : U \to V$, $g : V \to W$ の**積写像**（あるいは**積**）[3] $g \circ f : U \to W$ は線型写像である．さらに，f が U から V の上への線型同型写像，g が V から W の上への線型同型写像である場合には，$g \circ f$ は U から W の上への線型同型写像である．

証明： 任意の実数 a^1, a^2 および U の任意のベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ に対して

$$\begin{aligned}(g \circ f)(a^1\vec{u}_1 + a^2\vec{u}_2) &= g(f(a^1\vec{u}_1 + a^2\vec{u}_2)) = g(a^1 f(\vec{u}_1) + a^2 f(\vec{u}_2)) \\ &= a^1 g(f(\vec{u}_1)) + a^2 g(f(\vec{u}_2)) = a^1(g \circ f)(\vec{u}_1) + a^2(g \circ f)(\vec{u}_2)\end{aligned} \tag{1.19}$$

である．したがって，本命題の前半が成り立つ．命題の後半は明らかであろう．

命題 1.1.12. $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_l\}$, $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m\}$, $\{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_n\}$ を，それぞれ U, V, W の基底とする．線型写像 $f : U \to V$ の基底 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_l\}$, $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m\}$ による表現行列を $(f^\lambda{}_\nu)$，線型写像 $g : V \to W$ の基底 $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m\}$, $\{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_n\}$ による表現行列を $(g^\mu{}_\lambda)$ とすると，積 $g \circ f : U \to W$ の基底 $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_l\}$, $\{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m\}$ による表現行列は積行列

$$(g^\mu{}_\lambda) * (f^\lambda{}_\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{\lambda=1}^{m} g^\mu{}_\lambda f^\lambda{}_\nu\right) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n, \ \ \nu = 1, 2, \cdots, l) \tag{1.20}$$

である．

証明： $g \circ f$ の $\vec{u}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots, l)$ への作用は，

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\vec{u}_\nu) &= g(f(\vec{u}_\nu)) = g\left(\sum_{\lambda=1}^{m} f^\lambda{}_\nu \vec{v}_\lambda\right) = \sum_{\lambda=1}^{m} f^\lambda{}_\nu g(\vec{v}_\lambda) \\ &= \sum_{\lambda=1}^{m} f^\lambda{}_\nu \left(\sum_{\mu=1}^{n} g^\mu{}_\lambda \vec{w}_\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{n}\left(\sum_{\lambda=1}^{m} g^\mu{}_\lambda f^\lambda{}_\nu\right)(\vec{w}_\mu)\end{aligned} \tag{1.21}$$

と表される．したがって，命題が成り立つ．

---

3) 付録 **B** の定義 B.8 を参照．

1.2 テンソルと外積

線型汎関数とその一般化である多重線型形式，およびそれらがつくる線型空間を説明し，それに基づいてテンソルを導入する．さらに，対称テンソル，交代テンソルについて説明し，交代テンソルと外積の演算の基本的な性質を述べる．これらは微分形式とその外積を考える際の基礎になる．

1.2.1 線型汎関数，双対空間

線型空間 V から線型空間 R の中への線型写像，すなわち $L(V,R)$ の元を**線型汎関数**という．線型汎関数の全体がつくる線型空間 $\mathcal{L}(V,R) \overset{\text{def}}{=} \{L(V,R), R; +, \times, 田, ⊠\}$ を V の**双対空間**といい，V^* と記す．

$\dim R^1 = \dim R = 1$ であることと命題 1.1.9 等により明らかなように，$\dim V^* = \dim V$ である．

命題 1.2.1. $\mathcal{E} \overset{\text{def}}{=} \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ を V の基底とする．各 $\mu = 1, 2, \cdots, n$ に対して，

$$\vec{e}^{\mu}(\vec{v}) \overset{\text{def}}{=} v^{\mu}, \quad \forall \vec{v} = \sum_{\nu=1}^{n} v^{\nu} \vec{e}_{\nu} \in V \tag{1.22}$$

により $\vec{e}^{\mu}$ を定義すると，$\mathcal{E}^* \overset{\text{def}}{=} \{\vec{e}^1, \cdots, \vec{e}^n\}$ は V^* の基底である．

証明: 明らかに，$\vec{e}^{\mu}$ は V^* の元である．また，$\vec{0}^*$ を V^* の零ベクトル，c_{μ} $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$ を実数として，$\sum_{\mu=1}^{n} c_{\mu} \vec{e}^{\mu} = \vec{0}^*$ とおく．この式の両辺を $\vec{e}_{\nu}$ に作用させることにより

$$c_{\nu} = \left(\sum_{\mu=1}^{n} c_{\mu} \vec{e}^{\mu} \right) (\vec{e}_{\nu}) = \vec{0}^*(\vec{e}_{\nu}) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.23}$$

を得る．したがって，$\mathcal{E}^*$ は線型独立である．このことと $\dim V^* = \dim V$ であることにより，$\mathcal{E}^*$ は V^* の基底であることがわかる．

基底 $\mathcal{E}^*$ を基底 $\mathcal{E}$ の**双対基底**という．

命題 1.2.2. 基底 $\mathcal{E}$ とその双対基底 $\mathcal{E}^*$ について,

$$\vec{e}^{\mu}(\vec{e}_{\nu}) = \delta^{\mu}{}_{\nu} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.24}$$

が成り立つ．また，この関係式を満足する線型汎関数 $\vec{e}^{\mu}$ の組 $\{\vec{e}^1, \cdots, \vec{e}^n\}$ は $\mathcal{E}$ の双対基底である．なお，$\delta^{\mu}{}_{\nu}$ は Kronecker のデルタとよばれるもので，$\mu = \nu$ のとき 1, $\mu \neq \nu$ のとき 0 である．

証明：(1.22) において $\vec{v} = \vec{e}_{\nu}$ ととると，直ちに (1.24) が得られる．逆に，線型汎関数の組 $\{\vec{e}^1, \cdots, \vec{e}^n\}$ があって，基底 $\mathcal{E}$ に対して (1.24) を満足するならば，命題 1.1.10 によって，それは一意的である．したがって，この組は双対基底 $\mathcal{E}^*$ 以外のものではあり得ない．

命題 1.2.3. 線型空間 V の双対空間 V^* の双対空間 $V^{**} \stackrel{\text{def}}{=} (V^*)^*$ について，以下のことが成り立つ：

（1） V の任意に与えられたベクトル $\vec{v}$ に対応して,

$$(N(\vec{v}))(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(\vec{v}), \quad \forall f \in V^* \tag{1.25}$$

で定義される写像 $N(\vec{v}) : V^* \to R$ は V^{**} の元である．

（2） 写像 $N : V \to V^{**}$ は，線型空間 V から線型空間 V^{**} への線型同型写像である．

写像 $N : V \to V^{**}$ は，V と V^* との双対性に対応して自然に定まる．N のことを**自然同型写像**とよび，また V と V^{**} とは**自然同型**であるという．

上の記述からわかるように，V と V^{**} **とは互いに同一視することができる．以下では，この同一視によって** $V^{**} = V$ **として扱う**．

1.2.2 テンソル

p ($p \geq 1$) 個の線型空間 $V_1, \cdots, V_p$ を考える．**直積集合**[4)] $V_1 \times \cdots \times V_p$ から線型空間 R への写像 Φ が各変数について線型であるとき，すなわち

---

4) 付録 **B** の定義 B.4 を参照．

a, b を任意の実数とするとき，すべての $i = 1, 2, \cdots, p$ について

$$\begin{aligned}&\Phi(\vec{u}_1, \cdots, a\vec{u}_i + b\vec{v}_i, \cdots, \vec{u}_p) \\ &\quad = a\Phi(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_i, \cdots, \vec{u}_p) + b\Phi(\vec{u}_1, \cdots, \vec{v}_i, \cdots, \vec{u}_p) \\ &\qquad \forall \vec{u}_j,\ \vec{v}_j \in V_j \qquad (j = 1, 2, \cdots, p)\end{aligned} \tag{1.26}$$

が成り立つとき，写像 Φ は $V_1 \times \cdots \times V_p$ 上の **p 重線型形式**であるという．

命題 1.1.8 の場合と同様にして証明されるように，次の命題が成り立つ．

命題 1.2.4. $V_1 \times \cdots \times V_p$ 上の p 重線型形式全体の集合を $L(V_1, \cdots, V_p; R)$ と記す．a を任意の実数，Φ, Ψ を $L(V_1, \cdots, V_p; R)$ の任意の元として，

$$\left.\begin{aligned}(\Phi \boxplus \Psi)(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p) &\overset{\text{def}}{=} \Phi(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p) \oplus \Psi(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p) \\ (a \boxtimes \Phi)(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p) &\overset{\text{def}}{=} a\Phi(\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_p), \quad \forall \vec{u}_i \in V_i\end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

により演算 $\boxplus$ と $\boxtimes$ を定義すると，$\mathcal{L}(V_1, \cdots, V_p; R) \overset{\text{def}}{=} \{L(V_1, \cdots, V_p; R), R; +, \times, \boxplus, \boxtimes\}$ は線型空間である．

1 重線型形式は線型汎関数である．線型空間 $\mathcal{L}(V_1, \cdots, V_p; R)$ のことを ${V_1}^*, \cdots, {V_p}^*$ の**テンソル積**とよび，${V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^*$ と記す．

命題 1.2.5. $\dim({V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^*) = \dim V_1 \times \cdots \times \dim V_p$ である．

命題 1.2.6. $D(f, \vec{v}) \overset{\text{def}}{=} f(\vec{v}) = (N(\vec{v}))(f),\ \forall (f, \vec{v}) \in V^* \times V$ により定義される写像 $D : V^* \times V \to R$ は $V^* \times V$ 上の 2 重線型形式である．また，V の基底 $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ とそれに双対な V^* の基底 $\mathcal{E}^* = \{\vec{e}^1, \cdots, \vec{e}^n\}$ に対して，$D(\vec{e}^\mu, \vec{e}_\nu) = \delta^\mu{}_\nu$ である．

証明：a_1, a_2 を任意の実数，f^1, f^2 を V^* の任意の元，$\vec{v}$ を V の任意の元とすると，V^* における元の和の定義を用いて

$$\begin{aligned}&D(a_1 f^1 + a_2 f^2, \vec{v}) = (a_1 f^1 + a_2 f^2)(\vec{v}) \\ &\quad = a_1 f^1(\vec{v}) + a_2 f^2(\vec{v}) = a_1 D(f^1, \vec{v}) + a_2 D(f^2, \vec{v})\end{aligned} \tag{1.28}$$

を得る．同様に，V の任意のベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2$，V^* の任意の元 f に対して，$D(f, a^1\vec{v}_1 + a^2\vec{v}_2) = a^1 D(f, \vec{v}_1) + a^2 D(f, \vec{v}_2)$ が成り立つ．したがって，D は $V^* \times V$ 上の 2 重線型形式である．命題の後半は命題 1.2.2 と D の定義から明らかである．

写像 $D: V^* \times V \to R$ のことを V と V^* との**双対性を表す内積**という.

命題 1.2.7. $W_1, \cdots, W_q$ を線型空間とする. Φ, Ψ を, それぞれ ${V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^*$ の元および ${W_1}^* \otimes \cdots \otimes {W_q}^*$ の元とする.

$$\left.\begin{array}{c}(\Phi \otimes \Psi)(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p, \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_q) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)\Psi(\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_q) \\ \forall(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p, \vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_q) \in V_1 \times \cdots \times V_p \times W_1 \times \cdots \times W_q\end{array}\right\} \tag{1.29}$$

によって $\Phi \otimes \Psi$ を定義すると, これは ${V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^* \otimes {W_1}^* \otimes \cdots \otimes {W_q}^*$ の元である. ただし, p, q はいずれも自然数とする.

証明: $\Phi \in {V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^*, \Psi \in {W_1}^* \otimes \cdots \otimes {W_q}^*$ であることによって明らかである.

$\Phi \otimes \Psi$ を Φ と Ψ の**テンソル積**という.

次の命題は基本的である. 証明は読者にお任せする.

命題 1.2.8. a, b は共に任意の実数, p, q, r はいずれも自然数とする. Φ_1, Φ_2, Φ を ${V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^*$ の任意の 3 元, Ψ_1, Ψ_2, Ψ を ${W_1}^* \otimes \cdots \otimes {W_q}^*$ の任意の 3 元とする. また $X_1, \cdots, X_r$ を線型空間として, Θ を ${X_1}^* \otimes \cdots \otimes {X_r}^*$ の任意の元とする. このとき, 以下の関係が成り立つ:

$$\left.\begin{array}{l}(a \boxtimes \Phi_1 \boxplus b \boxtimes \Phi_2) \otimes \Psi = a \boxtimes (\Phi_1 \otimes \Psi) \boxplus b \boxtimes (\Phi_2 \otimes \Psi) \\ \Phi \otimes (a \boxtimes \Psi_1 \boxplus b \boxtimes \Psi_2) = a \boxtimes (\Phi \otimes \Psi_1) \boxplus b \boxtimes (\Phi \otimes \Psi_2)\end{array}\right\} \tag{1.30}$$

$$\Phi \otimes (\Psi \otimes \Theta) = (\Phi \otimes \Psi) \otimes \Theta \tag{1.31}$$

(1.30) のことを演算 $\otimes$ に対する**分配律**という. 分配律により[5], $a(\Phi \otimes \Psi) = (a\Phi) \otimes \Psi = \Phi \otimes (a\Psi)$ であることがわかる. テンソル積の演算 $\otimes$ については結合律 (1.31) が成り立つから, この式の両辺の量のことを $\Phi \otimes \Psi \otimes \Theta$ と記してもよい. 4 個以上の積についても同様である. なお, $\otimes$ は可換ではない. すなわち, $\Phi \otimes \Psi = \Psi \otimes \Phi$ は任意の Φ, Ψ に対しては成り立たない.

---

5) 以下では, $a \boxtimes \Phi, \Phi \boxplus \Psi$ のことをそれぞれ $a\Phi$ (あるいは $a \cdot \Phi$), $\Phi + \Psi$ と略記する.

命題 1.2.9. 線型空間 ${V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^*$ と 線型空間 ${V_{\sigma(1)}}^* \otimes \cdots \otimes {V_{\sigma(p)}}^*$ は線型同型である．ただし，$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ とする．ここに，$\mathfrak{S}_p$ は自然数 $1, 2, \cdots, p$ の**置換**全体から成る**置換群**[6] を表す．

証明： 写像 $\Upsilon_\sigma : {V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^* \to {V_{\sigma(1)}}^* \otimes \cdots \otimes {V_{\sigma(p)}}^*$ を[7]

$$\left.\begin{aligned} \Upsilon_\sigma(t) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} t_{\mu_1\cdots\mu_p}{\vec{e}_\sigma}^{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(p)}} \\ \forall t &= t_{\mu_1\cdots\mu_p}\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p} \in {V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^* \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

により定義すると，これは線型同型写像である．ただし，

$$\left.\begin{aligned} {\vec{e}_\sigma}^{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(p)}}\left(\vec{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \vec{v}_{\sigma(p)}\right) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} {v_{\sigma(1)}}^{\mu_{\sigma(1)}} \cdots {v_{\sigma(p)}}^{\mu_{\sigma(p)}} \\ \forall \vec{v}_i = \textstyle\sum_{\mu=1}^{n_i} {v_i}^\mu \vec{e}_{i,\mu} \in V_i \qquad &(i = 1, 2, \cdots, p) \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

とした．ここに，$n_i \stackrel{\mathrm{def}}{=} \dim V_i$ とし，$(\vec{e}_{i,1}, \cdots, \vec{e}_{i,n_i})$ は V_i の基底を表す[8]．

定義 1.2.1. $V_1 = \cdots = V_p = V$ であるときの ${V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^*$ のことを，$\otimes_p(V)$ と表す．また，$\otimes_0(V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} R$ とする．$\otimes_p(V)$ $(p = 0, 1, \cdots)$ の元のことを V 上の p 階**共変テンソル**という．0階共変テンソルはスカラーである．1階共変テンソルのことを**共変ベクトル**という．V を V^* の双対空間と見なして，$\otimes^p(V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \otimes_p(V^*)$ の元を V 上の p 階**反変テンソル**という．0階反変テンソルはスカラーである．1階反変テンソル，すなわち V のベクトルのことを，**反変ベクトル**という．さらに，$V_1 = \cdots = V_p = V^*$, $V_{p+1} = \cdots = V_{p+q} = V$ であるときの ${V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^* \otimes {V_{p+1}}^* \otimes \cdots \otimes {V_{p+q}}^*$ のことを，${\otimes^p}_q(V)$ と表す．${\otimes^0}_q(V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \otimes_q(V)$, ${\otimes^p}_0(V) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \otimes^p(V)$ とする．${\otimes^p}_q(V)$ の元のことを V 上の $\boldsymbol{p}$ **階反変** $\boldsymbol{q}$ **階共変テンソル**（あるいは $[\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}]$ **型のテンソル**）という．$p \geq 1, q \geq 1$ であるときの ${\otimes^p}_q(V)$ の元を V 上の**混合テンソル**という[9]．

$[p, 0]$ 型のテンソル，$[0, q]$ 型のテンソルは，それぞれ p 階反変テンソル，q 階共変テンソルである．また，${\otimes^0}_0(V) = \otimes^0(V) = \otimes_0(V) = R$ である．

6) 付録 **B** の **B.3** 節を参照．

7) Υ_σ はギリシャ文字（大文字）Υ（ウプシロン）のイタリック体 Υ に下付きの添数としてギリシャ文字 σ を付けたものを表す．

8) この命題が成り立つことは命題 1.1.7, 1.2.5 から明らかであるが，定義 1.2.1 に続く説明および命題 1.2.14 の証明の際の便を考え，線型同型写像を具体的に与えた．

9) 混乱が起こらないと思われる場合には，“V 上の” という言葉を省略することが多い．

${V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^* \otimes {V_{p+1}}^* \otimes \cdots \otimes {V_{p+q}}^*$ において，p 個の V_i が V^* で残りの q 個の V_j が V である場合としては，上記の $\otimes^p{}_q(V)$ の場合以外にも種々あり，全部で ${}_{p+q}\mathrm{C}_p$ 通りある．これに対応して混合テンソルにも種々のタイプのものがあるが，命題 1.2.9 によって $[p,q]$ の値が同一であるもの同士は線型同型である．これら種々のタイプについても，$\otimes^p{}_q(V)$ の場合と同様の議論を展開することができる．

命題 1.2.10. n を自然数として，$\dim V = n$ とする．$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ を V の基底とし，$\mathcal{E}^* = \{\vec{e}^1, \cdots, \vec{e}^n\}$ をその双対基底とする．このとき

$$\vec{e}_{\mu_1 \cdots \mu_p}{}^{\nu_1 \cdots \nu_q} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \vec{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{\mu_p} \otimes \vec{e}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}^{\nu_q} \tag{1.34}$$

とすると，$\{\vec{e}_{\mu_1 \cdots \mu_p}{}^{\nu_1 \cdots \nu_q} | \mu_1, \cdots, \mu_p, \nu_1, \cdots, \nu_q = 1, 2, \cdots, n\}$ は $\otimes^p{}_q(V)$ の基底である．

基底 $\{\vec{e}_{\mu_1 \cdots \mu_p}{}^{\nu_1 \cdots \nu_q} | \mu_1, \cdots, \mu_p, \nu_1, \cdots, \nu_q = 1, 2, \cdots, n\}$ を $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ によって定まる $\otimes^p{}_q(V)$ の**標準基底**という．

1.2.3 テンソルの成分表示と変換性

$\otimes^p{}_q(V)$ の元の標準基底の線型結合による表示について考える．

命題 1.2.11. $\otimes^p{}_q(V)$ の任意の元 t は

$$t = \sum_{\mu_1, \cdots, \mu_p, \nu_1, \cdots, \nu_q = 1}^{n} t^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \vec{e}_{\mu_1 \cdots \mu_p}{}^{\nu_1 \cdots \nu_q} \tag{1.35}$$

と一意的に表される．このとき

$$t^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = t(\vec{e}^{\mu_1}, \cdots, \vec{e}^{\mu_p}, \vec{e}_{\nu_1}, \cdots, \vec{e}_{\nu_q}) \tag{1.36}$$

である．

証明： t が (1.35) の形に一意的に表されることは前命題によって明らかである．また，(1.36) は，(1.35) の両辺を $(\vec{e}^{\lambda_1}, \cdots, \vec{e}^{\lambda_p}, \vec{e}_{\rho_1}, \cdots, \vec{e}_{\rho_q})$ に作用させて $\vec{e}_\mu(\vec{e}^\lambda) = \delta_\mu{}^\lambda$，$\vec{e}^\nu(\vec{e}_\rho) = \delta^\nu{}_\rho$ を用いることにより，容易に示される．

上の命題における $t^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ あるいはそれらの組 $\{t^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\}$ のことを基底 $\mathcal{E}=\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ に関する t の**成分**という.

(1.35) における添数についての和の記号は煩雑である．そこで次の規約を設ける.

Einstein の規約：上下1対になって現れる各添数についてその添数のとり得る値のすべてについての和をとる場合，和を表す記号 $\sum$ を省略する．これを **Einstein の規約**という.

以下，原則としてこの規約に従うこととする．(1.35) は次のように書かれる：

$$t=t^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q} \tag{1.37}$$

命題 1.2.12. V の任意の2つの基底 $\mathcal{E}'=\{\vec{e}'_1,\cdots,\vec{e}'_n\},\mathcal{E}=\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ を考える．各 $\vec{e}'_\nu$ を $\mathcal{E}$ の線型結合として表したときの展開係数を $K^\mu{}_\nu$ とする：

$$\vec{e}'_\nu=K^\mu{}_\nu\vec{e}_\mu,\quad K^\mu{}_\nu\in R\qquad(\nu=1,2,\cdots,n) \tag{1.38}$$

$\otimes^p{}_q(V)$ の任意の元 t について，基底 $\mathcal{E}'$ と $\mathcal{E}$ に関する成分をそれぞれ $t'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$, $t^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ とすると，

$$t'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}=(K^{-1})^{\mu_1}{}_{\lambda_1}\cdots(K^{-1})^{\mu_p}{}_{\lambda_p}K^{\rho_1}{}_{\nu_1}\cdots K^{\rho_q}{}_{\nu_q}t^{\lambda_1\cdots\lambda_p}{}_{\rho_1\cdots\rho_q} \tag{1.39}$$

である．なお，$(K^{-1})^\mu{}_\nu$ は行列 $K\overset{\text{def}}{=}(K^\mu{}_\nu)$ の逆行列 K^{-1} の行列要素を表す.

証明: K の逆行列が存在することは命題 1.1.6 によって保証されている．$\mathcal{E}'$ の双対基底を $\mathcal{E}'^*\overset{\text{def}}{=}\{\vec{e}'^1,\cdots,\vec{e}'^n\}$ と表すと，各 $\vec{e}'^\lambda$ は $\mathcal{E}$ の双対基底 $\mathcal{E}^*=\{\vec{e}^1,\cdots,\vec{e}^n\}$ の線型結合として,

$$\vec{e}'^\lambda=(K^{-1})^\lambda{}_\rho\vec{e}^\rho \tag{1.40}$$

と表される．このことは $\vec{e}'^\mu(\vec{e}'_\nu)=\delta^\mu{}_\nu=\vec{e}^\mu(\vec{e}_\nu)$ および (1.38) から容易にわかる．(1.36), (1.38), (1.40), t が $p+q$ 重線型写像であることおよび $t'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}=t(\vec{e}'^{\mu_1},\cdots,\vec{e}'^{\mu_p},\vec{e}'_{\nu_1},\cdots,\vec{e}'_{\nu_q})$ により，(1.39) を得る.

命題 1.2.13. 線型空間 V の各基底に対応して実数の組 $\{t^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}|\ \mu_1,\cdots,\mu_p,\nu_1,\cdots,\nu_q=1,2,\cdots,n\}$ が定まり，これが基底の変換 (1.38) のもとで (1.39) に従って変換するならば，$t^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ は $[p,q]$ 型のテンソルの成分である．

証明：$\{\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q}|\mu_1,\cdots,\mu_p,\nu_1,\cdots,\nu_q=1,2,\cdots,n\}$，$\{\vec{e}'{}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q}|\ \mu_1,\cdots,\mu_p,\nu_1,\cdots,\nu_q=1,2,\cdots,n\}$ を，それぞれ $\mathcal{E}$ および $\mathcal{E}'$ によって定まる $\otimes^p{}_q(V)$ の標準基底とすると

$$\vec{e}'{}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q}=\vec{e}'{}_{\mu_1}\otimes\cdots\otimes\vec{e}'{}_{\mu_p}\otimes\vec{e}'^{\nu_1}\otimes\cdots\otimes\vec{e}'^{\nu_q} \tag{1.41}$$

である．これと，(1.34)，(1.38) および (1.40) から

$$\vec{e}'{}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q}=K^{\lambda_1}{}_{\mu_1}\cdots K^{\lambda_p}{}_{\mu_p}(K^{-1})^{\nu_1}{}_{\rho_1}\cdots(K^{-1})^{\nu_q}{}_{\rho_q}\vec{e}_{\lambda_1\cdots\lambda_p}{}^{\rho_1\cdots\rho_q} \tag{1.42}$$

が導かれる．さらにこの式と (1.39) から

$$t\overset{\text{def}}{=}t'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\vec{e}'{}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q}=t^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q} \tag{1.43}$$

を得る．したがって，V の基底のとり方によらない $[p,q]$ 型のテンソル t が定まる．$t^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}$ は，このテンソルの成分である．

テンソルはその定義（= 定義 1.2.1）からわかるように，基になる線型空間の基底のとり方に依存しないものである．上の命題は「テンソルを基底の変換のもとでの成分の変換性に基づいて定義することも可能である」ことを示している．特殊相対論の入門書では，V として時空的に向き付けたれた Minkowski 的線型空間をとり，**特殊相対性原理**に基づいて扱う基底を $\vec{E}_0$ が時間的に正であり，時間的にも空間的にも一定の正規直交基底 $(\vec{E}_0,\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n)$ に限定した上で，「Lorentz 基底変換のもとで (1.39) にしたがって変換する量の組 $\{t^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\}$ を $[p,q]$ 型のテンソルという」という定義を採用している場合が多い[10]．これは基底の変換のもとでの成分の変換性に基づいてテンソルを定義する流儀に沿ったものであるが，基底

10) 時空的に向き付けられた Minkowski 的線型空間，正規直交基底，Lorentz 基底変換，時間的に正等の概念については，部分節 **1.3.2** および **1.3.5** を参照．

の変換 (1.38) を Lorentz 基底変換に限定しており，またテンソルの成分の議論に終始していて，(1.37) のような表示は与えられていないなど，テンソルの記述としては不十分である．また，扱う基底が上述のように限定されていることは,「特殊相対論では慣性系しか扱えない」という誤解に直結しており，(1.37) のような表示が与えられていないことは，テンソルそのものとその成分との混同をまねくなど，誤解や混乱の要因になっている．

テンソルの成分の例： V の各基底に対して $\{\delta^\mu{}_\nu\}$ を対応させると，これは $[1,1]$ 型のテンソルの成分である．このテンソルは任意の基底に関する成分が共通に Kronecker のデルタで与えられる特殊なテンソルである．

命題 1.2.14. $[p,q]$ 型のテンソル $s=s^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q}$ および $[a,b]$ 型のテンソル $t=t^{\lambda_1\cdots\lambda_a}{}_{\rho_1\cdots\rho_b}\vec{e}_{\lambda_1\cdots\lambda_a}{}^{\rho_1\cdots\rho_b}$ のテンソル積 $s\otimes t$ を

$$s^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}t^{\lambda_1\cdots\lambda_a}{}_{\rho_1\cdots\rho_b}\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p\lambda_1\cdots\lambda_a}{}^{\nu_1\cdots\nu_q\rho_1\cdots\rho_b} \tag{1.44}$$

と同一視することができる．

証明： $s\otimes t$ は

$$s\otimes t=s^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}t^{\lambda_1\cdots\lambda_a}{}_{\rho_1\cdots\rho_b}\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q}\otimes\vec{e}_{\lambda_1\cdots\lambda_a}{}^{\rho_1\cdots\rho_b} \tag{1.45}$$

と表される．命題 1.2.9 の証明におけるのと同様にして示されるように，

$$\Upsilon(\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p\lambda_1\cdots\lambda_a}{}^{\nu_1\cdots\nu_q\rho_1\cdots\rho_b})=\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q}\otimes\vec{e}_{\lambda_1\cdots\lambda_a}{}^{\rho_1\cdots\rho_b} \tag{1.46}$$

であるような線型同型写像 $\Upsilon:(\otimes^p{}_q(V))\otimes(\otimes^a{}_b(V))\to\otimes^{p+a}{}_{q+b}(V)$ が存在する．したがって，

$$s\otimes t=s^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}t^{\lambda_1\cdots\lambda_a}{}_{\rho_1\cdots\rho_b}\Upsilon(\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p\lambda_1\cdots\lambda_a}{}^{\nu_1\cdots\nu_q\rho_1\cdots\rho_b}) \tag{1.47}$$

となる．写像 Υ による**像**を**原像**と同一視することができるから，命題が成り立つ．

以下においては，$s\otimes t$ **を (1.44) と同一視する**.

テンソルの成分表示のことを述べたついでに，次の命題を述べておこう．

命題 1.2.15. $\otimes_p(V)$ と，$\otimes^p(V)$ の双対空間 $(\otimes^p(V))^*$ とは自然同型である．さらに，$\otimes^p{}_q(V)$ と，$\otimes^q{}_p(V)$ の双対空間 $(\otimes^q{}_p(V))^*$ とは自然同型である．

証明: $\{\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p}|\mu_1,\cdots,\mu_p=1,2,\cdots,n\}$, $\{\vec{e}^{\nu_1\cdots\nu_p}|\nu_1,\cdots,\nu_p=1,2,\cdots,n\}$ を，それぞれ基底 $\mathcal{E}=\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ によって定まる $\otimes^p(V)$ と $\otimes_p(V)$ の標準基底とする．$\otimes_p(V)$ の任意の元 $\varPhi=\varPhi_{\mu_1\cdots\mu_p}\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p}$，$\otimes^p(V)$ の任意の元 $X=X^{\nu_1\cdots\nu_p}\vec{e}_{\nu_1\cdots\nu_p}$ について

$$\begin{aligned} D_p(\varPhi,X) &\stackrel{\text{def}}{=} \varPhi(X) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \varPhi_{\mu_1\cdots\mu_p}X^{\nu_1\cdots\nu_p}\vec{e}^{\mu_1}(\vec{e}_{\nu_1})\cdots\vec{e}^{\mu_p}(\vec{e}_{\nu_p})=\varPhi_{\mu_1\cdots\mu_p}X^{\mu_1\cdots\mu_p} \end{aligned} \tag{1.48}$$

とする．$\otimes_p(V)$ と $\otimes^p(V)$ とは，この D_p を双対性を表す内積として互いに他の双対空間であり，したがって，命題 1.2.3 により $\otimes_p(V)$ と $(\otimes^p(V))^*$ とは自然同型である．より一般に，$\otimes^p{}_q(V)$ と $(\otimes^q{}_p(V))^*$ とが自然同型であることも同様にして示される．

1.2.4 テンソルの縮約

$[p,q]$ 型のテンソルから $[p-1,q-1]$ 型のテンソルをつくり出す，縮約とよばれる操作について考えよう．

命題 1.2.16. p,q を共に自然数とするとき，テンソル空間 $\otimes^p{}_q(V)$ から $\otimes^{p-1}{}_{q-1}(V)$ への線型写像 $C^r{}_s$ で，

$$\left.\begin{aligned} &C^r{}_s(\vec{v}_1\otimes\cdots\otimes\vec{v}_p\otimes f^1\otimes\cdots\otimes f^q) \\ &\qquad =f^s(\vec{v}_r)(\vec{v}_1\otimes\cdots\otimes\widehat{\vec{v}_r}\otimes\vec{v}_{r+1}\otimes\cdots\otimes\vec{v}_p \\ &\qquad\qquad \otimes f^1\otimes\cdots\otimes\widehat{f^s}\otimes f^{s+1}\otimes\cdots\otimes f^q) \\ &\qquad \forall\vec{v}_i\in V\quad(i=1,2,\cdots,p),\quad \forall f^j\in V^*\quad(j=1,2,\cdots,q) \end{aligned}\right\} \tag{1.49}$$

を満足するものが一意的に存在する．ここに，$r=1,2,\cdots,p$, $s=1,2,\cdots,q$ であり，また $\widehat{\vec{v}_r}$, $\widehat{f^s}$ は，それぞれ変数 $\vec{v}_r$, f^s を省くことを示す．

証明: $\otimes^p{}_q(V)$ 上で定義された条件 (1.49) を満足する線型写像 $C^r{}_s$ が存在するものとすると，それは一意的であることを示そう．$\mathcal{E}=\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ を V の基底として，$\vec{v}_1=\vec{e}_{\mu_1}$, $\cdots$, $\vec{v}_p=\vec{e}_{\mu_p}$, $f^1=\vec{e}^{\nu_1}$, $\cdots$, $f^q=\vec{e}^{\nu_q}$ ととって，条件 (1.49)

を当てはめると

$$C^r{}_s(\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q}) = \delta^{\nu_s}{}_{\mu_r}\vec{e}_{\mu_1\cdots\widehat{\mu_r}\mu_{r+1}\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\widehat{\nu_s}\nu_{s+1}\cdots\nu_q} \tag{1.50}$$

となり，$\otimes^p{}_q(V)$ の基底 $\{\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q}|\mu_1,\cdots,\mu_p,\nu_1,\cdots,\nu_q = 1,2,\cdots,n\}$ に対する $C^r{}_s$ の作用が決まる．したがって命題 1.1.10 により，このような線型写像が存在するものとすると，それは一意的である．

次に，$C^r{}_s$ を具体的に構成することにより，その存在を示そう．

$$\left.\begin{array}{r} C^r{}_s(t) \stackrel{\text{def}}{=} t^{\mu_1\cdots\lambda\mu_{r+1}\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\lambda\nu_{s+1}\cdots\nu_q}\vec{e}_{\mu_1\cdots\widehat{\mu_r}\mu_{r+1}\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\widehat{\nu_s}\nu_{s+1}\cdots\nu_q} \\ \forall t = t^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q} \in \otimes^p{}_q(V) \end{array}\right\} \tag{1.51}$$

とする．以下にみるように (1.51) の右辺は $t \in \otimes^p{}_q(V)$ が与えられれば V の基底のとり方によらず一意的に定まり，したがってこの式により $C^r{}_s(t)$ が正しく定義されることとなる．V の任意の基底 $\mathcal{E}' = \{\vec{e}'_1,\cdots,\vec{e}'_n\}$ によって定まる $\otimes^p{}_q(V)$ の標準基底を，$\{\vec{e}'_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q}|\mu_1,\cdots,\mu_p,\nu_1,\cdots,\nu_q = 1,2,\cdots,n\}$ と表す．(1.51) によれば，

$$\left.\begin{array}{r} C^r{}_s(t) = t'^{\mu_1\cdots\lambda\mu_{r+1}\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\lambda\nu_{s+1}\cdots\nu_q}\vec{e}'_{\mu_1\cdots\widehat{\mu_r}\mu_{r+1}\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\widehat{\nu_s}\nu_{s+1}\cdots\nu_q} \\ \forall t = t'^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q}\vec{e}'_{\mu_1\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\nu_q} \in \otimes^p{}_q(V) \end{array}\right\} \tag{1.52}$$

ということになる．(1.39)，(1.42) を用いると，(1.51) と (1.52) の右辺同士が等しいことが示される．したがって，(1.51) によって $C^r{}_s$ は正しく定義されている．この $C^r{}_s$ が $\otimes^p{}_q(V)$ から $\otimes^{p-1}{}_{q-1}(V)$ への線型写像であることは，明白である．

(1.51) で定義される $C^r{}_s$ が条件 (1.49) を満足することを示そう．$\vec{v}_i \quad (i = 1,2,\cdots,p)$ を V の任意の元，$f^j \quad (j = 1,2,\cdots,q)$ を V^* の任意の元とすると，これらはそれぞれ $\vec{e}_\mu, \vec{e}^\nu$ の線型結合として $\vec{v}_i = X^\mu{}_i\vec{e}_\mu$, $f^j = Y^j{}_\nu\vec{e}^\nu$ という形に表される．したがって (1.34)，(1.51) により，

$$\begin{aligned} &C^r{}_s(\vec{v}_1\otimes\cdots\otimes\vec{v}_p\otimes f^1\otimes\cdots\otimes f^q) \\ &\quad = X^{\mu_1}{}_1\cdots X^\lambda{}_r X^{\mu_{r+1}}{}_{r+1}\cdots X^{\mu_p}{}_p Y^1{}_{\nu_1}\cdots Y^s{}_\lambda Y^{s+1}{}_{\nu_{s+1}}\cdots Y^q{}_{\nu_q} \\ &\qquad \times\vec{e}_{\mu_1\cdots\widehat{\mu_r}\cdots\mu_p}{}^{\nu_1\cdots\widehat{\nu_s}\cdots\nu_q} \end{aligned} \tag{1.53}$$

を得る．さらに，$f^j = Y^j{}_\nu \vec{e}^\nu, \vec{v}_i = X^\mu{}_i \vec{e}_\mu$，(1.34) で $p \to p-1$, $q \to q-1$ と置き換えたもの，および

$$f^s(\vec{v}_r) = Y^s{}_\mu X^\nu{}_r \vec{e}^\mu(\vec{e}_\nu) = Y^s{}_\mu X^\mu{}_r \tag{1.54}$$

を用いると，(1.49) を得る．すなわち，(1.51) で定義される $C^r{}_s$ は条件 (1.49) を満足する．以上を総合すると，命題 1.2.16 が証明されたことになる．

写像 $C^r{}_s$ を，r 番目の反変添数（上付きの添数）と s 番目の共変添数（下付きの添数）についての**縮約**という．上の命題は縮約を (1.51) によって定義することも可能であることを示している．

1.2.5 対称テンソル，交代テンソル

p を自然数として，p 階共変テンソル $t \in \otimes_p(V)$ に対する置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ の作用 P_σ を次のように定義する：

$$\left.\begin{aligned} (P_\sigma t)(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p) &\stackrel{\text{def}}{=} t(\vec{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \vec{v}_{\sigma(p)}) \\ \forall \vec{v}_i \in V &\qquad (i = 1, 2, \cdots, p) \end{aligned}\right\} \tag{1.55}$$

容易に示されるように，P_σ は $\otimes_p(V)$ の正則線型変換である．

t を p 階共変テンソルとする．任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して $P_\sigma t = t$ であるとき，t は**対称**であるといい，t を**対称共変テンソル**という．また，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して $P_\sigma t = \mathrm{sgn}(\sigma) t$ であるとき，t は**交代**であるといい，t を**交代共変テンソル**という．ここに，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は σ が**偶置換** である場合は 1，**奇置換**である場合は -1 であり，σ の**符号**とよばれる．p 階交代共変テンソルのことを p 次**交代形式**ともいう．p 階対称共変テンソル全体の集合を $S_p(V)$，p 階交代共変テンソル全体の集合を $A_p(V)$ とする．また，$S_0(V) \stackrel{\text{def}}{=} A_0(V) \stackrel{\text{def}}{=} R$ とする．これにより，任意の非負の整数 p に対して，p 階対称共変テンソル，p 階交代共変テンソル（p 次交代形式）を考えることができる．また，$S_1(V) = A_1(V) = \otimes_1(V) = V^*$ である．

命題 1.2.17. 共変テンソル $t \in \otimes_p(V)$ を考える．$t_{\mu_1 \cdots \mu_p}$ を V の 1 つの基底に関する t の成分とする．t が対称共変テンソルであるための必要十分条

件は次の関係が成り立つことである：

$$t_{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(p)}} = t_{\mu_1\cdots\mu_p}, \quad \forall\sigma \in \mathfrak{S}_p \tag{1.56}$$

t が交代共変テンソルであるための必要十分条件は次の関係が成り立つことである：

$$t_{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(p)}} = \mathrm{sgn}(\sigma) t_{\mu_1\cdots\mu_p}, \quad \forall\sigma \in \mathfrak{S}_p \tag{1.57}$$

証明： $t \in \otimes_p(V)$ とする．$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ を V の基底として，$\mathcal{E}$ によって定まる $\otimes_p(V)$ の標準基底を $\{\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p} | \mu_1, \cdots, \mu_p = 1, 2, \cdots, n\}$ とする．t の $\mathcal{E}$ に関する成分を $t_{\mu_1\cdots\mu_p}$ とすると，$t = t_{\mu_1\cdots\mu_p}\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p}$，$t_{\mu_1\cdots\mu_p} = t(\vec{e}_{\mu_1}, \cdots, \vec{e}_{\mu_p})$ である．したがって，$\vec{v}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ を V の任意のベクトルとして，$\vec{v}_i = c^{\mu}{}_i \vec{e}_\mu$ と表すと

$$t(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p) = t_{\mu_1\cdots\mu_p} c^{\mu_1}{}_1 \cdots c^{\mu_p}{}_p \tag{1.58}$$

$$\begin{aligned}(P_\sigma t)(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p) &= (t_{\mu_1\cdots\mu_p}\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p})(\vec{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \vec{v}_{\sigma(p)}) \\ &= t_{\mu_1\cdots\mu_p} c^{\mu_1}{}_{\sigma(1)} \cdots c^{\mu_p}{}_{\sigma(p)} = t_{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(p)}} c^{\mu_1}{}_1 \cdots c^{\mu_p}{}_p\end{aligned} \tag{1.59}$$

である．このことから命題が成り立つことは明らかである．

p 階共変テンソル t の成分 $t_{\mu_1\cdots\mu_p}$ が (1.56)（(1.57)）を満足するとき，この成分は**対称**（**交代**）であるという[11)]．

$\otimes_p(V)$ の変換 S_p, A_p を次のように定義する：

$$S_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} P_\sigma, \quad A_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\sigma) P_\sigma \tag{1.60}$$

S_p, A_p のことを，それぞれ**対称化作用素**および**交代化作用素**という．S_p, A_p は共に線型変換であるが，$p \geq 2$ に対してはこれらは正則線型変換ではない．

11）この文章は精確には次のように書くべきところを簡略化したものである：
p 階共変テンソル t の成分 $t_{\mu_1\cdots\mu_p}$ が (1.56) を満足するとき，この成分は対称であるといい，また (1.57) を満足するとき，この成分は交代であるという．
以下においても，同様の略記法を頻繁に用いる．

命題 1.2.18. $\odot$ を変換の積を表す記号とすると，$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して

$$P_\sigma \odot S_p = S_p \odot P_\sigma = S_p, \quad P_\sigma \odot A_p = A_p \odot P_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) A_p \tag{1.61}$$

が成り立つ．

証明：

$$\begin{aligned}(P_\sigma \odot S_p)t &= P_\sigma \left(\frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} P_\tau t \right) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} (P_\sigma \odot P_\tau)t = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} P_\sigma t = S_p t, \quad \forall t \in \otimes_p(V)\end{aligned} \tag{1.62}$$

により，$P_\sigma \odot S_p = S_p$ が成り立つことがわかる．ここに，P_σ の線型性，$P_\sigma \odot P_\tau = P_{\sigma \circ \tau}$ および $\mathfrak{S}_p$ の元 τ すべてについての和をとるとき，$\sigma \circ \tau$ は $\mathfrak{S}_p$ のすべての元を各 1 回ずつ "訪れる" ことを用いた．同様に，$S_p \odot P_\sigma = S_p$ である．さらに，

$$\begin{aligned}(P_\sigma \odot A_p)t &= P_\sigma \left(\frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\tau) P_\tau t \right) = \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\tau)(P_\sigma \odot P_\tau)t \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau)(P_\sigma \odot P_\tau)t \\ &= \mathrm{sgn}(\sigma) \left(\frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\tau) P_\tau t \right) = \mathrm{sgn}(\sigma) A_p t, \quad \forall t \in \otimes_p(V)\end{aligned} \tag{1.63}$$

により，$P_\sigma \odot A_p = \mathrm{sgn}(\sigma) A_p$ が成り立つことがわかる．ここに，$\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau)$ を用いた．同様に，$A_p \odot P_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) A_p$ を得る．

命題 1.2.19. $S_p \odot S_p = S_p$，$A_p \odot A_p = A_p$ である．

証明：(1.61) の第 1 式を用いると，

$$S_p \odot S_p = \left(\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} P_\sigma \right) \odot S_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} P_\sigma \odot S_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} S_p = S_p \tag{1.64}$$

となり，第1式が成り立つ．同様に，(1.61) の第2式を用いることにより $A_p \odot A_p = A_p$ を得る．

命題 1.2.20. $\otimes_p(V)$ の元 t が $t \in S_p(V)$ であるための必要十分条件および $t \in A_p(V)$ であるための必要十分条件は，それぞれ $S_p t = t$ および $A_p t = t$ が成り立つことである．

証明： $t \in S_p(V)$ とすると $P_\sigma t = t$ であり，したがって，$S_p t = t$ である．逆に $S_p t = t$ とすると，$P_\sigma t = P_\sigma(S_p t) = (P_\sigma \odot S_p)t = S_p t = t$ となる．ここに，(1.61) の第1式を用いた．したがって，命題の前半部分が示された．同様に，(1.61) の第2式を用いることによって命題の後半部分が示される．

命題 1.2.18，1.2.20 からわかるように，$t \in \otimes_p(V)$ に対して $S_p t \in S_p(V)$, $A_p t \in A_p(V)$ である．

命題 1.2.21. $\mathcal{S}_p(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{S_p(V), R; +, \times, +, \cdot\}$ および $\mathcal{A}_p(V) \stackrel{\text{def}}{=} \{A_p(V), R; +, \times, +, \cdot\}$ は，共に $\otimes_p(V)$ の部分線型空間であり，それらの次元数はそれぞれ ${}_{n+p-1}\mathrm{C}_p$, ${}_n\mathrm{C}_p$ である．ただし，$n \stackrel{\text{def}}{=} \dim V \geq 1$ とする．

証明： これらが共に $\otimes_p(V)$ の部分線型空間であることは明らかである．また，$\dim S_0(V) = \dim A_0(V) = 1$ であるから，$p = 0$ に対して命題が成り立つことは自明. $p \geq 1$ の場合を考える．$\mathcal{S}_p(V)$, $\mathcal{A}_p(V)$ の基底を構成しよう．$\{\vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p} | \mu_1, \cdots, \mu_p = 1, 2, \cdots, n\}$ を，基底 $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ によって定まる $\otimes_p(V)$ の標準基底とする．$S_p(\vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p})$ $(\mu_1, \cdots, \mu_p = 1, 2, \cdots, n)$ のうち，相異なるものの全体は $\mathcal{S}_p(V)$ の基底であることを示そう．

$$S_p(\vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p}) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \vec{e}^{\mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(p)}} \tag{1.65}$$

であり，この右辺は対称であるから，$S_p(\vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p}) = S_p(\vec{e}^{\nu_1 \cdots \nu_p})$ であるのは，**添数集合** $\{\mu_1, \cdots, \mu_p\}$ と $\{\nu_1, \cdots, \nu_p\}$ とが，同一文字の重複度も含めて一致するとき，かつそのときに限る．$S_p(\vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p})$ $(\mu_1, \cdots, \mu_p = 1, 2, \cdots, n)$ のうち相異なるものの全体は明らかに線型独立であり，その数は n 個の相異なるものの中から p 個をとる重複組み合わせの数 ${}_{n+p-1}\mathrm{C}_p$ である．$S_p(V)$ の任意の元を s とすると，$s = S_p s$ であるから，s はこれら ${}_{n+p-1}\mathrm{C}_p$ 個の相異なる $S_p(\vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p})$ の組の線型結合とし

て表される．したがって，命題 1.1.4 によって，この組は線型空間 $\mathcal{S}_p(V)$ の基底である．ゆえに，$\mathcal{S}_p(V)$ の次元数は ${}_{n+p-1}\mathrm{C}_p$ である．

次に，$\mathcal{A}_p(V)$ について考える．$p > n$ のときは $\dim \mathcal{A}_p(V) = 0 = {}_n\mathrm{C}_p$ なので明らかに命題が成り立つ．$1 \leq p \leq n$ の場合を考える．

$$A_p(\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p}) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\mathrm{sgn}(\sigma)\vec{e}^{\mu_{\sigma(1)}\cdots\mu_{\sigma(p)}} \tag{1.66}$$

であり，この右辺は交代であるから $\mu_1, \cdots, \mu_p$ のすべてが互いに異なるときかつそのときに限り，$A_p(\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p}) \neq 0$ である．ここに，0 は線型空間 $\otimes_p(V)$ の零ベクトルを表す[12)]．$\{A_p(\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p})|\mu_1 < \cdots < \mu_p,\, \mu_1, \cdots, \mu_p = 1, 2, \cdots, n\}$ は $\mathcal{A}_p(V)$ の基底であることを示そう．以下，この証明の終わりまで，$A_p(\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p})$ 等の添数 $\mu_1, \cdots, \mu_p$ はすべて互いに異なるものとする．

$A_p(\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p})$ と $A_p(\vec{e}^{\nu_1\cdots\nu_p})$ とは，集合 $\{\mu_1, \cdots, \mu_p\}$, $\{\nu_1, \cdots, \nu_p\}$ が互いに異なるときかつそのときに限り線型独立であって，さらに組 $\{A_p(\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p})|\mu_1 < \cdots < \mu_p,\, \mu_1, \cdots, \mu_p = 1, 2, \cdots, n\}$ は線型独立でありその個数は ${}_n\mathrm{C}_p$ である．$\mathcal{A}_p(V)$ の任意の元 a に対して $a = A_p a$ であるから，a は $\{A_p(\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p})|\mu_1 < \cdots < \mu_p,\, \mu_1, \cdots, \mu_p = 1, 2, \cdots, n\}$ の線型結合として表される．ゆえに，命題 1.1.4 によって，この組は $A_p(V)$ の基底である．したがって $\mathcal{A}_p(V)$ の次元数は ${}_n\mathrm{C}_p$ である．

命題 1.2.22. $A_p t = 0$ である $t \in \otimes_p(V)$ の全体の集合を $N_p(V)$ と記すと，$\mathcal{N}_p(V) \overset{\mathrm{def}}{=} \{N_p(V), R; +, \times, +, \cdot\}$ は $\otimes_p(V)$ の部分線型空間であり

$$\otimes_p(V) = \mathcal{A}_p(V) \oplus \mathcal{N}_p(V) \tag{1.67}$$

である．ここに $\oplus$ は直和を表す．

証明：$\mathcal{N}_p(V)$ が $\otimes_p(V)$ の部分線型空間であることは明らかである．$\otimes_p(V)$ の任意の元 t は $t = A_p t + t - A_p t$ と表される．命題 1.2.20 に続いて述べたように $A_p t \in A_p(V)$ であり，命題 1.2.19 により $A_p(t - A_p t) = 0$ である．したがって，$t - A_p t \in N_p(V)$ である．また，$A_p(V) \bigcap N_p(V)$ の任意の元を u とすると，$u = A_p u = 0$ であるから，$A_p(V) \bigcap N_p(V) = \{0\}$ である．以上により (1.67) が成り立つことがわかった．

12) $\otimes_p(V)$ を含め，各種の線型空間の零ベクトルを 0 で表すことが多い．記号としては実数の 0 と同じであるが，使われている場面に応じてその意味を弁別して頂きたい．

命題 1.2.23. $s \in N_p(V)$, $t \in \otimes_q(V)$ であるならば，$s \otimes t \in N_{p+q}(V)$ である．

命題 1.2.24. $s \in \otimes_p(V), t \in \otimes_q(V)$ とすると，

$$A_{p+q}(A_p(s) \otimes A_q(t)) = A_{p+q}(s \otimes t) \tag{1.68}$$

である．

証明： テンソル積の演算の分配律[13)]により，

$$s \otimes t = A_p(s) \otimes A_q(t) + (s - A_p(s)) \otimes A_q(t) + s \otimes (t - A_q(t)) \tag{1.69}$$

が成り立つ．命題 1.2.22 の証明からわかるように，$s - A_p(s) \in N_p(V)$, $t - A_q(t) \in N_q(V)$ である．したがって命題 1.2.23 により，(1.69) の右辺の第 2 項，第 3 項はいずれも $N_{p+q}(V)$ の元である．このことに注意して $A_{p+q}(s \otimes t)$ に (1.69) を代入して A_{p+q} の線型性を用いることにより，(1.68) が得られる．

上の命題は，2 つの任意の共変テンソル s, t を交代化したもののテンソル積をさらに交代化した結果は，s, t のテンソル積を交代化したものに等しいこと，すなわち，**「交代化は最後に 1 回やればよい」**ことを示している．

この部分節のこれまでの議論における V を V^* に置き換えることにより，p 階**対称反変テンソル**とそれら全体の集合 $S^p(V) \overset{\text{def}}{=} S_p(V^*)$，$p$ 階**交代反変テンソル**とそれら全体の集合 $A^p(V) \overset{\text{def}}{=} A_p(V^*)$，反変テンソルとそれらの成分の対称，交代の概念，反変テンソルの対称化作用素および交代化作用素が定義される．より一般に，任意の混合テンソルに対して，その反変テンソル部分，共変テンソル部分，それぞれについて対称および交代の概念，対称化作用素，交代化作用素が定義され，命題 1.2.17～1.2.24 に対応する命題が成り立つ．

対称共変テンソル，対称反変テンソルを総称して**対称テンソル**といい，交代共変テンソル，交代反変テンソルを総称して**交代テンソル**という．

---

13) 命題 1.2.8 を参照．

1.2.6 交代テンソルの外積，内部積

$s \in A_p(V)$, $t \in A_q(V)$ に対して，

$$s \wedge t \overset{\text{def}}{=} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} A_{p+q}(s \otimes t) \tag{1.70}$$

で定義される $s \wedge t$ を s と t の**外積**という[14]．命題 1.2.20 に続く記述から明らかなように，$s \wedge t \in A_{p+q}(V)$ である．

命題 1.2.25. a, b を共に任意の実数，s_1, s_2, s を $A_p(V)$ の任意の 3 元，そして t_1, t_2, t を $A_q(V)$ の任意の 3 元とする．また，u を $A_r(V)$ の任意の元とする．このとき，以下の式が成り立つ：

$$\left.\begin{aligned} (as_1 + bs_2) \wedge t &= a(s_1 \wedge t) + b(s_2 \wedge t) \\ s \wedge (at_1 + bt_2) &= a(s \wedge t_1) + b(s \wedge t_2) \end{aligned}\right\} \tag{1.71}$$

$$s \wedge (t \wedge u) = (s \wedge t) \wedge u \tag{1.72}$$

(1.71) より，$a(s \wedge t) = (as) \wedge t = s \wedge (at)$ が導かれる．結合律 (1.72) が成り立つから，この式の両辺の量のことを $s \wedge t \wedge u$ と記してもよい．4 個以上の積についても同様であり，また，一般に $t_i \in A_{p_i}(V)$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ に対して，次式が成り立つ：

$$t_1 \wedge \cdots \wedge t_k = \frac{(p_1 + \cdots + p_k)!}{p_1! \cdots p_k!} A_{p_1 + \cdots + p_k}(t_1 \otimes \cdots \otimes t_k) \tag{1.73}$$

命題 1.2.26. $f^i \in V^*$, $\vec{v}_i \in V$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ とすると，以下の関係式が成り立つ：

$$(f^1 \wedge \cdots \wedge f^p)(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p) = \det(f^i(\vec{v}_j)) \tag{1.74}$$

$$f^1 \wedge \cdots \wedge f^p = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma) f^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f^{\sigma(p)} \tag{1.75}$$

命題 1.2.27. n 個の共変ベクトルの組 $\{\vec{e}^1, \cdots, \vec{e}^n\}$ を V^* の基底とすると，$\{\vec{e}^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \vec{e}^{\mu_p} | \mu_1 < \cdots < \mu_p,\ \mu_1, \cdots, \mu_p = 1, 2, \cdots, n\}$ は $\mathcal{A}_p(V)$ の基底である．

---

14) $s \wedge t \overset{\text{def}}{=} A_{p+q}(s \otimes t)/p!\,q!$ という定義を採用している本もある．

証明：(1.34)，(1.73) からわかるように

$$A_p(\vec{e}^{\mu_1\cdots\mu_p}) = \frac{1}{p!}\vec{e}^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \vec{e}^{\mu_p} \tag{1.76}$$

である．このことと命題 1.2.21 の証明から，本命題が成り立つことがわかる．

(1.34) と (1.35) によれば，$\otimes_p(V)$ の任意の元は一意的に

$$t = t_{\mu_1\cdots\mu_p}\vec{e}^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}^{\mu_p} \tag{1.77}$$

と表される．ここに，$t_{\mu_1\cdots\mu_p} = t(\vec{e}_{\mu_1}, \cdots, \vec{e}_{\mu_p})$ である．とくに，$t \in A_p(V)$ である場合は

$$t = \sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p} t_{\mu_1\cdots\mu_p}\vec{e}^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \vec{e}^{\mu_p} = \frac{1}{p!}t_{\mu_1\cdots\mu_p}\vec{e}^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \vec{e}^{\mu_p} \tag{1.78}$$

となる．

命題 1.2.28. $s \in A_p(V)$, $t \in A_q(V)$ ならば，

$$s \wedge t = (-1)^{pq} t \wedge s \tag{1.79}$$

である．

証明：$p = 0$ あるいは $q = 0$ の場合は，明らかに命題は成り立つ．$p = q = 1$ の場合は，$s \wedge t = s \otimes t - t \otimes s = -t \wedge s$ であって命題が成り立つ．このことと交代形式の表示 (1.78) を用いれば，任意の自然数 p, q に対して命題が成り立つことが容易にわかる．

$\otimes_p(V)$ の元 t および V のベクトル $\vec{v}$ に対して

$$\left.\begin{array}{ll} i(\vec{v})t \overset{\text{def}}{=} 0 & (p = 0) \\ (i(\vec{v})t)(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_{p-1}) \overset{\text{def}}{=} t(\vec{v}, \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_{p-1}) & \\ \forall \vec{v}_i \in V & (i = 1, 2, \cdots, p-1,\ p \geq 1) \end{array}\right\} \tag{1.80}$$

によって $i(\vec{v})t$ を定義して，これを $\vec{v}$ と t との**内部積**という．

$t \in \otimes_p(V)$ に対して，$i(\vec{v})t \in \otimes_{p-1}(V)$ である．とくに，$t \in S_p(V)$ ならば $i(\vec{v})t \in S_{p-1}(V)$ であり，$t \in A_p(V)$ ならば $i(\vec{v})t \in A_{p-1}(V)$ である．また，写像 $i(\vec{v}) : \otimes_p(V) \to \otimes_{p-1}(V)$ は線型写像である．なお，ここでは $\otimes_{-1}(V) = A_{-1}(V) = S_{-1}(V) = \{0\}$ と理解するものとする．

さらに，$\otimes_p(V)$ $(p = 1, 2, \cdots)$ の元 t および V の元 $\vec{v}$ を，それぞれ (1.77), $\vec{v} = v^\mu \vec{e}_\mu$ のように表すと，$i(\vec{v})t$ の成分表示

$$i(\vec{v})t = t_{\mu\nu_1\cdots\nu_{p-1}} v^\mu \vec{e}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}^{\nu_{p-1}} \tag{1.81}$$

が得られる．とくに，共変ベクトル $t = t_\mu \vec{e}^\mu$ に対しては $i(\vec{v})t = t_\mu v^\mu \in R$ となる．また，$f_i \in V^*$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$, $\vec{v} \in V$ とすると，(1.74)，$i(\vec{v})f_i = f_i(\vec{v})$ であること，および行列式の列についての展開式を用いることによって容易に示されるように，

$$i(\vec{v})(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} (i(\vec{v})f_i)(f_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{f_i} \wedge \cdots \wedge f_p) \tag{1.82}$$

である．

命題 1.2.29. $s \in A_p(V)$, $t \in A_q(V)$ に対して

$$i(\vec{v})(s \wedge t) = (i(\vec{v})s) \wedge t + (-1)^p s \wedge (i(\vec{v})t) \tag{1.83}$$

が成り立つ．

証明： f_i, g_j $(i = 1, 2, \cdots, p,\ j = 1, 2, \cdots, q)$ を V^* の任意の元とすると，

$$\begin{aligned} & i(\vec{v})(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge \cdots \wedge g_q) \\ &= \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} (i(\vec{v})f_i)(f_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{f_i} \wedge \cdots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge \cdots \wedge g_q) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{q} (-1)^{p+j+1} (i(\vec{v})g_j)(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p \wedge g_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{g_j} \wedge \cdots \wedge g_q) \\ &= (i(\vec{v})(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p)) \wedge g_1 \wedge \cdots \wedge g_q \\ &\quad + (-1)^p (f_1 \wedge \cdots \wedge f_p) \wedge (i(\vec{v})(g_1 \wedge \cdots \wedge g_q)) \end{aligned} \tag{1.84}$$

となる．ここで，(1.82) を用いた．このことと，$A_p(V)$，$A_q(V)$ の元は，それぞれ $f_1 \wedge \cdots \wedge f_p$ なる形の元の線型結合，$g_1 \wedge \cdots \wedge g_q$ なる形の元の線型結合であること，および写像 $i(\vec{v}) : \otimes_p(V) \to \otimes_{p-1}(V)$ の線型性により命題が成り立つことがわかる．

交代反変テンソル同士の**外積** $\curlywedge$，V^* の元と $\otimes^p(V)$ の元の**内部積**も上と同様の仕方で定義され，命題 1.2.25〜1.2.29 に対応する命題が成立する．さらに，反変部分が交代な混合テンソル同士の反変テンソル部分の外積 $\curlywedge$ も定義される[15]．ただし，命題 1.2.14 に基づいて，$s = s^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \vec{e}_{\mu_1 \cdots \mu_p}{}^{\nu_1 \cdots \nu_q}$ と $t = t^{\lambda_1 \cdots \lambda_a}{}_{\rho_1 \cdots \rho_b} \vec{e}_{\lambda_1 \cdots \lambda_a}{}^{\rho_1 \cdots \rho_b}$ のテンソル積 $s \otimes t$ を，(1.44) で与えられるテンソルと同一視することとする．その結果，例えば，p 階交代反変 q 階共変テンソル s および a 階交代反変 b 階共変テンソル t を，共に反変部分を表す添数について交代な成分 $s^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$，$t^{\lambda_1 \cdots \lambda_a}{}_{\rho_1 \cdots \rho_b}$ を用いて，それぞれ $s = (1/p!) s^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} (\vec{e}_{\mu_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\mu_p}) \otimes \vec{e}^{\nu_1 \cdots \nu_q}$，$t = (1/a!) t^{\lambda_1 \cdots \lambda_a}{}_{\rho_1 \cdots \rho_b} (\vec{e}_{\lambda_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\lambda_a}) \otimes \vec{e}^{\rho_1 \cdots \rho_b}$ と表すと，反変テンソル部分についての外積は

$$
\begin{aligned}
s \curlywedge t = & \frac{1}{p!\,a!} s^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} t^{\lambda_1 \cdots \lambda_a}{}_{\rho_1 \cdots \rho_b} \\
& \times (\vec{e}_{\mu_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\mu_p} \curlywedge \vec{e}_{\lambda_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\lambda_a}) \\
& \otimes \vec{e}^{\nu_1 \cdots \nu_q \rho_1 \cdots \rho_b}
\end{aligned}
\tag{1.85}
$$

となる．$bq = 0$ の場合は，関係式 $s \curlywedge t = (-1)^{ap} t \curlywedge s$ が成り立つ．

さらに，一般の混合テンソルについて，反変テンソル部分，共変テンソル部分，それぞれについて内部積が定義される．また共変部分が交代な混合テンソル同士の共変テンソル部分についての外積，反変部分と共変部分が共に交代である混合テンソル同士の反変テンソル部分および共変テンソル部分それぞれについての外積を同時につくる演算等も定義できる．

[15] 交代共変テンソルに関する外積の演算 $\wedge$ と区別するために，交代反変テンソル部分に関する外積の演算を $\curlywedge$ と表すことにする．第4章では，外積 $\curlywedge$ を用いて角運動量，力のモーメントを定義する．

1.3 向き，計量，演算積および星印作用素

これまでの議論では,「実数には大小，正負の概念がある」ことが用いられていない．以下においては，実数のもつこれらの属性に基づいて，線型空間の向き，計量，交代テンソルの演算積，Hodge の星印作用素等の概念を導入しよう．これらは物理学において重要な役割を担っている．

1.3.1 線型空間の向き

線型空間 V の基底 $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ において，n 個のベクトル $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ の並び順に意味があるものと見なし，この基底を**順序付けられた基底**とよぶ．そして，$\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ を順序付けられた基底として扱うとき，これを $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ と表すことにする．この記法によれば，$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n) \neq (\vec{e}_2, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ である．V の順序付けられた基底全体の集合を $OB(V)$ と記す．命題 1.1.6 によると，$OB(V)$ の任意の 2 元 $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n), (\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n)$ は互いに正則線型変換で結び付けられている:

$$\vec{e}'_\mu = K^\nu{}_\mu \vec{e}_\nu, \quad \det K \neq 0 \tag{1.86}$$

なお，K は $K \stackrel{\text{def}}{=} (K^\nu{}_\mu)$ で定義される行列である．

集合 $OB(V)$ に関係 $\sim$ を次のように導入する：$OB(V)$ の任意の 2 元 $\mathcal{E}_o = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n), \mathcal{E}'_o = (\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n)$ について，それらを結び付ける正則線型変換の表現行列 K の行列式 $\det K$ の値が正であるときかつそのときに限り，$\mathcal{E}_o \sim \mathcal{E}'_o$ とする．

命題 1.3.1. 関係 $\sim$ は**同値関係**である．この関係 $\sim$ による**同値類**の数は 2 である．

証明： $\det K > 0$ であれば $\det K^{-1} > 0$ であること，$\det K > 0, \det K' > 0$ であれば $\det(KK') > 0$ であること等を用いることにより，(1.86) に基づいて，$OB(V)$ の任意の元 $\mathcal{E}_o$ に対して $\mathcal{E}_o \sim \mathcal{E}_o$ であること，$OB(V)$ の 3 元 $\mathcal{E}_o, \mathcal{E}'_o, \mathcal{E}''_o$ について，$\mathcal{E}_o \sim \mathcal{E}'_o$ ならば $\mathcal{E}'_o \sim \mathcal{E}_o$ であること，$\mathcal{E}_o \sim \mathcal{E}'_o, \mathcal{E}'_o \sim \mathcal{E}''_o$ ならば $\mathcal{E}_o \sim \mathcal{E}''_o$ であることが示される．すなわち，$\sim$ は，同値関係の定義（= 付録 **B** の定義 B.9）の条件 **[E1]**〜**[E3]** のすべてを満足し，したがって同値関係である．関係

$\sim$ による同値類の数は 2 であることを証明するためには[16)]，$\mathcal{E}_o \not\sim \mathcal{E}'_o, \mathcal{E}'_o \not\sim \mathcal{E}''_o$ ならば $\mathcal{E}_o \sim \mathcal{E}''_o$ であることを示せばよいが，これは $\det K < 0, \det K' < 0$ ならば $\det(KK') > 0$ であることにより明らかである．かくて命題が示された．

定義 1.3.1. 上記の 2 つの同値類を $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ と記すことにして，これらを V の**向き**といい，一方を V の**正の向き**，他方を**負の向き**と指定する．向きの指定されている線型空間を**向き付けられた線型空間**という．線型空間 V が向き付けられているとき，これを V_o と記し，その正（負）の向きに属する基底のことを**正（負）の基底**という．

なお，$\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ のうちのどちらを正の向きと指定してもよい．

以下に示すように，V_o の向きは n 次交代形式を用いて表現することもできる．

命題 1.3.2. V_o 上の 0 でない n 次交代形式全体の集合を $\mathcal{A}^\sharp{}_n(V_o)$ と表す．$OB(V_o)$ の任意の 2 元 $\mathcal{E}_o = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$, $\mathcal{E}'_o = (\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n)$ が同じ向きに属するための必要十分条件は，$\mathcal{A}^\sharp{}_n(V_o)$ の 1 つの元 ω に対して $\omega(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ と $\omega(\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n)$ とが同符号であることである．

証明： $\mathcal{E}_o = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ と $\mathcal{E}'_o = (\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n)$ とは (1.86) の関係にある．したがって，

$$\omega(\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n) = K^{\mu_1}{}_1 \cdots K^{\mu_n}{}_n \omega(\vec{e}_{\mu_1}, \cdots, \vec{e}_{\mu_n}) = (\det K)\omega(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n) \tag{1.87}$$

である．一方 $\dim A_n(V_o) = 1$ であるから $A^\sharp{}_n(V_o)$ の任意の 2 元 ω, ω' に対して $\omega = k\omega'$ なる 0 でない実数 k が存在する．このことと (1.87) により命題が成り立つことがわかる．

$\mathcal{A}^\sharp{}_n(V_o)$ の元 ω と ω' に対して $\omega = k\omega'$ なる正数 k が存在するとき，$\omega \simeq \omega'$ とする．

16) $\mathcal{E}_o \sim \mathcal{E}'_o$ でないことを $\mathcal{E}_o \not\sim \mathcal{E}'_o$ と記す．

命題 1.3.3. 関係 $\simeq$ は同値関係であり，この関係による $\mathcal{A}^{\sharp}{}_n(V_o)$ の**商集合** $\mathcal{A}^{\sharp}{}_n(V_o)/\simeq$ の元の数，すなわち $\simeq$ による同値類の数は 2 である．これらの同値類を $\mathcal{O}^*{}_i$ $(i=1,2)$ と表すことにして，これらを

$$\left.\begin{array}{r}\mathcal{O}^*{}_i = \{\omega \in \mathcal{A}^{\sharp}{}_n(V_o) | \omega(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n) > 0,\, (\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n) \in \mathcal{O}_i\} \\ \mathcal{O}_i = \{(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n) \in OB(V) | \omega(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n) > 0,\, \omega \in \mathcal{O}^*{}_i\}\end{array}\right\} \tag{1.88}$$

となるようにとることができる．

証明：関係 $\simeq$ が同値関係であること，およびこの関係による同値類の数が 2 であることは明白であろう．容易にわかる如く，$\omega \simeq \omega'$ であるための必要十分条件は，$(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)$ を $OB(V)$ の元とするとき，$\omega(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)$ と $\omega'(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)$ とが同符号であることである．したがって，$\simeq$ に関する同値類を適当に番号付けして，$\mathcal{O}^*{}_1, \mathcal{O}^*{}_2$ と表すことにして，これが (1.88) を満足するようにとることができる．

上の命題により，$\mathcal{O}^*{}_i$ $(i=1,2)$ を V_o の向きと考えることができ，一方の向きを正の向き，他方の向きを負の向きと指定することができる．

上のように V_o の向きを定めたとき，$\mathcal{A}^{\sharp}{}_n(V_o)$ の正（負）の向きに属する元を**正（負）の n 次交代形式**とよぶ．

上と同様にして，V^* の基底 $\{\vec{e}^1,\cdots,\vec{e}^n\}$ において，$\vec{e}^1,\cdots,\vec{e}^n$ の並び順に意味があるものと見なすことにより，V^* の順序付けられた基底とそれら同士の同値関係，向き付けられた線型空間 $V^*{}_o$，正（負）の基底，$V^*{}_o$ 上の 0 でない n 次交代形式の全体の集合 $\mathcal{A}^{\sharp}{}_n(V^*{}_o)$，正および負の n 階交代反変テンソルを考えることができ，命題 1.3.1〜1.3.3 に対応する命題が成り立つ．以下においては，$V^*{}_o$ の向きを，$\mathcal{E}_o = (\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)$ が V_o の正（負）の基底であるときその双対基底 $\mathcal{E}^*{}_o = (\vec{e}^1,\cdots,\vec{e}^n)$ は $V^*{}_o$ の正（負）の基底であるように定めることとし，このとき $V^*{}_o$ は V_o の向きに**同伴する向き付け**がなされているという．

1.3.2　計量線型空間

2 階対称共変テンソル s が与えられているとき，

$$Q(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} s(\vec{u},\vec{u}), \quad \forall\vec{u} \in V \tag{1.89}$$

によって定義される写像 $Q: V \to R$ を V 上の **2 次形式**という．s の 2 重線型性を用いて示されるように，2 次形式 Q と元（もと）の 2 階対称共変テンソル s の間には

$$Q(\vec{u}+\vec{v}) = Q(\vec{u}) + 2s(\vec{u},\vec{v}) + Q(\vec{v}) \tag{1.90}$$

なる関係が成り立つ．したがって，1 つの 2 次形式 Q を与える元の 2 階対称共変テンソル s は一意的である．

命題 1.3.4. t を 2 階共変テンソルとする[17)]．$t(\vec{a},\vec{a}) \neq 0$ なるベクトル $\vec{a}$ を固定して $W \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{u} \in V | t(\vec{u},\vec{a}) = 0\}$ とすると，$\mathcal{W} \stackrel{\text{def}}{=} \{W, R; +, \times, \oplus, \cdot\}$ は V の部分線型空間であり $\dim\mathcal{W} = \dim V - 1$ である．

証明：任意の $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in W$，任意の実数 c_1, c_2 に対して，$t(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2, \vec{a}) = 0$ であるから，命題 1.1.2 により $\mathcal{W}$ は V の部分線型空間である．また，明らかに $\vec{a} \notin W$ である．V の任意のベクトル $\vec{v}$ に対して，$c \stackrel{\text{def}}{=} (t(\vec{a},\vec{a}))^{-1}t(\vec{v},\vec{a})$ とおいて $\vec{w} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{v} - c\vec{a}$ とすると，$t(\vec{w},\vec{a}) = 0$ となるから，$\vec{w} \in W$ である．$m \stackrel{\text{def}}{=} \dim\mathcal{W}$ として $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m\}$ を $\mathcal{W}$ の基底とすると，ベクトルの組 $\{\vec{a}, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m\}$ は線型独立である．また，$\vec{w}$ は c^μ $(\mu = 1, 2, \cdots, m)$ を実数として $\vec{w} = \vec{v} - c\vec{a} = c^\mu\vec{e}_\mu$ と表される．したがって，$\vec{v} = c\vec{a} + c^\mu\vec{e}_\mu$ となる．よって，命題 1.1.4 により $\{\vec{a}, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m\}$ は V の基底である．したがって，$\dim\mathcal{W} = \dim V - 1$ である[18)]．

命題 1.3.5. $V = [\vec{a}] \oplus W$ である．ただし，$[\vec{a}]$ は $\{\vec{a}\}$ によって張られる V の部分線型空間を表すものとする．

証明：前命題の証明によれば，V の任意のベクトル $\vec{v}$ は，c をある実数として $\vec{v} = c\vec{a} + \vec{w}$, $\vec{w} \in W$ と一意的に表され，$[\vec{a}] \cap W = \{\vec{0}\}$ である．したがって，命題が成り立つ．

17) t は対称である必要はない．
18) 以下では，$\mathcal{W}$ のことを W と略記する．

命題 1.3.6. n を自然数とする．n 次元線型空間 V 上の任意の 2 次形式 Q に対して V の基底 $\mathcal{E} = \{\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n\}$ を適当に選ぶことによって，任意のベクトル $\vec{u} = u^i\vec{E}_i \in V$ に対して

$$Q(\vec{u}) = -\sum_{i=1}^{a}(u^i)^2 + \sum_{i=1}^{b}(u^{a+i})^2, \quad a+b \leq n \tag{1.91}$$

となるようにできる．ただし，a, b は非負の整数として，$a = 0$ の場合，$b = 0$ の場合については，それぞれ (1.91) の右辺の第 1 項，第 2 項はないものと理解する．

証明：$Q(\vec{u}) = 0, \forall\vec{u} \in V$ である場合には，任意の基底 $\mathcal{E}$ に対して (1.91) の $a = b = 0$ の場合の式が成り立つことは明白である．$Q(\vec{a}) \neq 0$ なる $\vec{a} \in V$ が存在する場合を考える．このとき

$$\vec{E}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{a}}{\sqrt{|Q(\vec{a})|}} \tag{1.92}$$

に対して，$Q(\vec{E}_1) = \varepsilon_1 \stackrel{\text{def}}{=} Q(\vec{a})/|Q(\vec{a})|$ である．ここに，$|\quad|$ は絶対値記号である．$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{u} - u^1\vec{E}_1$, $u^1 \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_1 s(\vec{u}, \vec{a})/\sqrt{|Q(\vec{a})|}$ とおくと，$s(\vec{v}, \vec{a}) = 0$ である．ここに s は Q と (1.89) の関係にある 2 階対称共変テンソルを表す．したがって，$\vec{v} \in W \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{w} \in V | s(\vec{w}, \vec{a}) = 0\}$ である．

n に関する数学的帰納法によって証明しよう．命題 1.3.4 によれば，$m \stackrel{\text{def}}{=} \dim W = n - 1$ である．$n = 1$ のときは $m = 0$ となり，したがって $\vec{v} = \vec{0}$，すなわち $\vec{u} = u^1\vec{E}_1$ であり，$Q(\vec{u}) = \varepsilon_1(u^1)^2$ となって，命題が成り立つことがわかる[19)]．$n > 1$ の場合を考えよう．$\dim V = n - 1$ の場合に命題が成り立つものとする．$\vec{v} \in W$, $\dim W = n - 1$ であるから，Q を W に**制限**して考えると，W について帰納法の仮定を適用することができる．したがって，ε_i $(i = 2, \cdots, n)$ を整数 $-1, 0, 1$ のいずれかとして，また W の基底 $\{\vec{E}_2, \cdots, \vec{E}_n\}$ を適当にとることにより，$Q(\vec{v}) = \sum_{i=2}^{n}\varepsilon_i(u^i)^2$ とすることができる．ゆえに，(1.92) および $\vec{v} \in W$ であることを用いると $Q(\vec{u}) = Q(\vec{v} + u^1\vec{E}_1) = Q(\vec{v}) + 2s(\vec{v}, u^1\vec{E}_1) + Q(u^1\vec{E}_1) = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(u^i)^2$ となる．さらに，基底 $\mathcal{E} = \{\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n\}$ におけるベクトル $\vec{E}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の添数を適宜付け替えると (1.91) が得られる．

19) ${\varepsilon_1}^2 = 1$ であることに注意．

命題 1.3.7. （**Sylvesterの慣性法則**） 前命題において，非負の整数の組 (a,b) は与えられた Q ごとに一意的であって，$Q(\vec{u})$ を (1.91) の形に表す際の V の基底の選び方によらない．

2次形式 Q が与えられたとき，Sylvesterの慣性法則における非負の整数 a,b の組 (a,b) および和 $a+b$ を，それぞれ Q の**符号数**および**階数**という．階数が $n \overset{\mathrm{def}}{=} \dim V$ に等しいとき，Q は**非退化**であるといい，階数が n よりも小さいときは，Q は**退化**であるという．$(a,b)=(0,n)$ であるとき，Q は**正値2次形式**であるという．非退化な2次形式 Q と (1.90) の関係にある2階対称共変テンソル s のことを，V の符号数 (a,b) の**計量テンソル**（あるいは単に**計量**）といい[20]，この s を g と表すことにする．

符号数 (a,b) の計量テンソル g が与えられた線型空間 V を $V^{(a,b)}$ と表し，これを符号数 (a,b) の**計量線型空間**という．また，$a+b=n$ であることに鑑み，符号数 (a,b) の n 次元計量線型空間のことを $V^{(a,n-a)}$ と記す．符号数 $(0,n)$ の計量 g のことを **Euclid計量**，符号数 $(a,b)=(1,n-1)$ の g のことを，**Minkowski計量**という．$V^{(0,n)}, V^{(1,n-1)}$ を，それぞれ **Euclid的線型空間**，**Minkowski的線型空間**という．簡単のため，Euclid的線型空間 $V^{(0,n)}$ のことを V^n と記す．特殊相対論においては，4次元Minkowski的線型空間 $V^{(1,3)}$ が基本的位置を占めている．

計量線型空間 $V^{(a,b)}$ において，$|g(\vec{u},\vec{u})|=1$ であるベクトル $\vec{u}$ を**単位ベクトル**という．また，$g(\vec{u},\vec{v})=0$ であるとき，ベクトル $\vec{u}$ とベクトル $\vec{v}$ とは**直交**するという．

命題 1.3.8. n 次元計量線型空間 $V^{(a,n-a)}$ において，ベクトルの組 $\mathcal{E}=\{\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n\}$ が[21]

$$\left.\begin{aligned} &g(\vec{E}_i,\vec{E}_j)=0 \quad (i\neq j) \\ &g(\vec{E}_i,\vec{E}_i)=\begin{cases} -1 & (i=1,2,\cdots,a) \\ 1 & (i=a+1,a+2,\cdots,n) \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{1.93}$$

を満足するならば，$\mathcal{E}$ は $V^{(a,n-a)}$ の基底である．ただし，n は自然数とする．

20) 計量のことを**内積**ともいう．

21) $a=0$ の場合，$a=n$ の場合は，それぞれ (1.93) の第2式の1行目，2行目はないものと理解する．

証明：$c^j\vec{E}_j=\vec{0}$ とすると，$|g(\vec{E}_i, c^j\vec{E}_j)|=|c^i|=0\ \ (i=1,2,\cdots,n)$ となるから，$\mathcal{E}$ は線型独立である．また $\dim V^{(a,n-a)}=n$ であるから，$\mathcal{E}$ は $V^{(a,n-a)}$ の基底である．

(1.93) を満足する基底のことを**正規直交基底**という．正規直交基底 $\mathcal{E}=\{\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n\}$ に属する各ベクトル $\vec{E}_i\ \ (i=1,2,\cdots,n)$ は単位ベクトルである．

命題 1.3.9. 計量線型空間 $V^{(a,n-a)}$ において，基底 $\mathcal{E}=\{\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n\}$ が正規直交基底であるための必要十分条件は，V の任意のベクトル $\vec{u}$ を $\vec{u}=u^i\vec{E}_i$ と表したとき $Q_g(\vec{u})\stackrel{\mathrm{def}}{=}g(\vec{u},\vec{u})$ が (1.91) の表示をもつことである．

証明：$Q_g(\vec{u})\stackrel{\mathrm{def}}{=}g(\vec{u},\vec{u})$ とすると

$$Q_g(\vec{u}+\vec{v})=Q_g(\vec{u})+2g(\vec{u},\vec{v})+Q_g(\vec{v}) \tag{1.94}$$

である．V の任意のベクトル $\vec{u}$ を基底 $\mathcal{E}$ を用いて $\vec{u}=u^i\vec{E}_i$ と表したとき，$Q_g(\vec{u})\stackrel{\mathrm{def}}{=}g(\vec{u},\vec{u})$ が (1.91) の表示をもつものとする．(1.94) で $\vec{u}=\vec{E}_i, \vec{v}=\vec{E}_j$ とおいて，(1.91) を Q_g に適用したものを用いると (1.93) が得られ，$\mathcal{E}$ は正規直交基底であることがわかる．逆に，ベクトルの組 $\mathcal{E}$ が正規直交基底であるものとする．任意のベクトル $\vec{u}=u^i\vec{E}_i$ に対して $Q_g(\vec{u})=g(\vec{u},\vec{u})=u^iu^jg(\vec{E}_i,\vec{E}_j)$ であるから，(1.93) を用いれば (1.91) が導かれる．かくて命題が証明された．

命題 1.3.6 と上の命題により明らかなように，計量線型空間には正規直交基底が存在する．$\{\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n\}$ を正規直交基底とするとき，ベクトル $\vec{u}$ を $\vec{u}=u^j\vec{E}_j$ と表すことにより容易に証明できるように，$g(\vec{E}_i,\vec{u})=0\ \ (i=1,2,\cdots,n)$ であるための必要十分条件は $\vec{u}=\vec{0}$ であることである[22]．

数ベクトル空間 R^n において，任意の元 $\vec{u}=(u^1,\cdots,u^n)$ に対して，(1.91) の右辺によって $Q(\vec{u})$ を定義すると，これは R^n 上の 2 次形式である．Q が非退化であるとき，すなわち $a+b=n$ であるときは，R^n は符号数 $(a,n-a)$ の計量線型空間であって，自然基底 $\{\vec{\Delta}_1,\cdots,\vec{\Delta}_n\}$ は正規直交基底である．

---

22) 正規直交基底は，$\{\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n\}$ というように大文字を用いて表し，ベクトルの正規直交基底による表示は，添数を表す記号としては英語のアルファベットの中央部分 $i,j,k,\cdots$ を用いて $\vec{u}=u^i\vec{E}_i, \vec{v}=v^j\vec{E}_j,\cdots$ というように表すことにする．これに対応して，テンソルについても同様の記法を用いる．

命題 1.3.10. 計量テンソル g の，任意の基底 $\mathcal{E}=\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ に関する成分 $g_{\mu\nu}=g(\vec{e}_\mu,\vec{e}_\nu)$ を要素とする行列 $(g_{\mu\nu})$ は正則である．

証明： $c^\mu\vec{e}_\mu=\vec{0}$ とすると，$g(c^\mu\vec{e}_\mu,\vec{e}_\nu)=c^\mu g(\vec{e}_\mu,\vec{e}_\nu)=c^\mu g_{\mu\nu}=0\quad(\nu=1,2,\cdots,n)$ である．仮に $\det(g_{\mu\nu})=0$ とすると，$c^\mu g_{\mu\nu}=0\ (\nu=1,2,\cdots,n)$ であるような $(c^1,\cdots,c^n)\neq(0,\cdots,0)$ が存在することになり，$\mathcal{E}$ の線型独立性と矛盾する．したがって $\det(g_{\mu\nu})\neq 0$，すなわち $(g_{\mu\nu})$ は正則である．

行列 $(g_{\mu\nu})$ の逆行列を $(g^{\mu\nu})$ と記す．また，計量線型空間 $V^{(a,n-a)}$ において，正規直交基底 $\{\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n\}$ に関する g の成分を η_{ij} と表し，n 次の正方行列 (η_{ij}) の逆行列を (η^{ij}) と記す．η_{ij} と η^{ij} は数値的には同一で，

$$\eta_{ij}=\eta^{ij}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ -1 & (i=j=1,2,\cdots,a)\\ 1 & (i=j=a+1,a+2,\cdots,n)\end{cases}\tag{1.95}$$

である．

計量線型空間 $V^{(a,n-a)}$ の正規直交基底から正規直交基底への線型変換を**正規直交基底変換**という．とくに，Minkowski 的線型空間 $V^{(1,n-1)}$ の場合，この変換を **Lorentz 基底変換**という．

命題 1.3.11. $\{\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n\}$, $\{\vec{E}'_1,\cdots,\vec{E}'_n\}$ を共に正規直交基底とする．これらを (1.86) の関係で結ぶ $K=(K^j{}_i)$ は次の関係を満足する：

$$\eta_{ij}=K^k{}_i\eta_{kl}K^l{}_j,\quad \eta^{ij}=K^i{}_k\eta^{kl}K^j{}_l,\quad (\det K)^2=1\tag{1.96}$$

証明: $\eta_{ij}=g(\vec{E}'_i,\vec{E}'_j)=g(K^k{}_i\vec{E}_k,K^l{}_j\vec{E}_l)=K^k{}_iK^l{}_jg(\vec{E}_k,\vec{E}_l)=K^k{}_i\eta_{kl}K^l{}_j$ である．また，(1.86) を $\vec{E}_i$ について解いて

$$\vec{E}_i=(K^{-1})^j{}_i\vec{E}'_j\tag{1.97}$$

と表して，同様の考察をすることにより $\eta_{ij}=(K^{-1})^k{}_i\eta_{kl}(K^{-1})^l{}_j$ が示される．この両辺のおのおのを成分とする行列を考えて逆行列を考えることにより，第2式を得る．これらから $(\det K)^2=1$ が帰結することは明らかである．

(1.89)，命題 1.3.6 から明らかなように，次の命題が成り立つ．

命題 1.3.12. 2階対称共変テンソル s が Euclid 計量であるための必要十分条件は，

[**1**] $s(\vec{u},\vec{u}) \geq 0,\ \forall \vec{u} \in V$

[**2**] ベクトル $\vec{u}$ に対して $s(\vec{u},\vec{u}) = 0$ ならば $\vec{u} = \vec{0}$

が共に成り立つことである．

上の命題からわかるように，Euclid 的線型空間ではない計量線型空間にあっては，$g(\vec{u},\vec{u}) \geq 0$ とは限らず，また $g(\vec{u},\vec{u}) = 0$ であるようなベクトル $\vec{u}$ も零ベクトルとは限らない．

Euclid 的線型空間 V^n において，ベクトル $\vec{u}$ に対して

$$|\vec{u}| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g(\vec{u},\vec{u})} \tag{1.98}$$

で定義される $|\vec{u}|$ を $\vec{u}$ の**ノルム**という．

命題 1.3.13. ノルムについて以下のことが成り立つ：

(1) $|\vec{u}| \geq 0$ である．また，$|\vec{u}| = 0$ であるのは $\vec{u} = \vec{0}$ であるとき，かつそのときに限る．

(2) $|a\vec{u}| = |a||\vec{u}|$

(3) $|g(\vec{u},\vec{v})| \leq |\vec{u}||\vec{v}|$ であり，等号が成り立つのは $\vec{u} = k\vec{v}$ あるいは $\vec{v} = k\vec{u}$ であるような実数 k が存在するとき，かつそのときに限る．

(4) $|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}|$ である．

証明：(1)，(2) はノルムの定義と前命題によって明らかである．正規直交基底をとって，前命題，実数についての Schwarz の不等式

$$\sum_{i=1}^{n}(u^i)^2 \sum_{j=1}^{n}(v^j)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} u^i v^i\right)^2 \tag{1.99}$$

およびこの式において等号が成り立つのは $u^i = kv^i$ あるいは $v^i = ku^i$ であるような実数 k が存在するときに限ること，を用いれば (3)，(4) も容易に示される．

上の (3)，(4) の不等式を，それぞれ **Schwarz の不等式**および **3 角不等式**という．

数ベクトル空間 R^n において，命題 1.3.9 に続く部分で述べた仕方で 2 次形式 Q を定義して，これが符号数 $(0, n)$ の計量，すなわち Euclid 計量 g である場合を考えると，(1.98) によってノルムを定義することができる．

計量線型空間において，反変テンソルと共変テンソルの 1 対 1 対応を与える写像として，ζ（ゼータ）とその**逆写像** κ（カッパ）を導入しよう．

定義 1.3.2. 計量線型空間 $V^{(a,n-a)}$ が与えられたとき，ζ を

$$(\zeta(\vec{a}))(\vec{v}) \overset{\text{def}}{=} g(\vec{a}, \vec{v}), \quad \forall \vec{v}, \vec{a} \in V^{(a,n-a)} \tag{1.100}$$

により定義する．

命題 1.3.14. 写像 ζ は $V^{(a,n-a)}$ から $(V^{(a,n-a)})^*$ の上への線型同型写像である．

証明: 容易にわかるように $\zeta(\vec{a}) \in (V^{(a,n-a)})^*$ であり，したがって ζ は $V^{(a,n-a)}$ から $(V^{(a,n-a)})^*$ への写像である．$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ を $V^{(a,n-a)}$ の基底，$\mathcal{E}^* = \{\vec{e}^1, \cdots, \vec{e}^n\}$ をその双対基底とする．$\zeta(\vec{a}), g, \vec{a}, \vec{v}$ の $\mathcal{E}$ に関する成分をそれぞれ $(\zeta(\vec{a}))_\mu, g_{\mu\nu}, a^\mu, v^\mu$ と表すと，(1.100) は

$$(\zeta(\vec{a}))_\nu v^\nu = g_{\mu\nu} a^\mu v^\nu, \quad \forall a^\mu, v^\mu \in R \quad (\mu = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.101}$$

となる．したがって $\zeta(\vec{a}) = g_{\mu\nu} a^\mu \vec{e}^\nu$ となり，ζ は線型写像であることがわかる．また，$(V^{(a,n-a)})^*$ の任意の元 $f = f_\mu \vec{e}^\mu$ に対応して，$\vec{b} \overset{\text{def}}{=} g^{\mu\nu} f_\mu \vec{e}_\nu \in V^{(a,n-a)}$ が存在して $\zeta(\vec{b}) = f$ である．ゆえに ζ は**全写**である．ζ が**単写**であることは，$\zeta(\vec{a}) = g_{\mu\nu} a^\mu \vec{e}^\nu$ および $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ により明らかである．よって命題が成り立つ．

基底 $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ に関する g の成分を $g_{\mu\nu}$，$\mathcal{E}$ の双対基底を $\mathcal{E}^* = \{\vec{e}^1, \cdots, \vec{e}^n\}$ とすると，(1.100) によれば $(\zeta(\vec{e}_\mu))(\vec{v}) = (\zeta(\vec{e}_\mu))(v^\nu \vec{e}_\nu) = g(\vec{e}_\mu, v^\nu \vec{e}_\nu) = g_{\mu\nu} v^\nu = (g_{\mu\nu} \vec{e}^\nu)(\vec{v}), \forall \vec{v} \in V^{(a,n-a)}$ である．したがって $\zeta(\vec{e}_\mu) = g_{\mu\nu} \vec{e}^\nu \ (\mu = 1, 2, \cdots, n)$ である．写像 $\zeta : V^{(a,n-a)} \to (V^{(a,n-a)})^*$ の逆写像を κ と表す．すなわち，$\kappa \overset{\text{def}}{=} \zeta^{-1}$ とする．

一般に，p 階反変テンソル $t = t^{\mu_1 \cdots \mu_p} \vec{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{\mu_p}$ に対して，

$$\left.\begin{aligned} \zeta(t) &\overset{\text{def}}{=} t_{\mu_1 \cdots \mu_p} \vec{e}^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}^{\mu_p} \\ t_{\mu_1 \cdots \mu_p} &\overset{\text{def}}{=} g_{\mu_1 \nu_1} \cdots g_{\mu_p \nu_p} t^{\nu_1 \cdots \nu_p}, \quad \forall t \in \otimes^p (V^{a,n-a}) \end{aligned}\right\} \tag{1.102}$$

とすると，写像 $\zeta : \otimes^p(V^{(a,n-a)}) \to \otimes_p(V^{a,n-a)})$ は well-defined である[23)].
すなわち，$\zeta(t)$ は，基底 $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ の選び方によらずに一意的に定まる．ζ は線型同型写像であり，その逆写像 $\kappa \stackrel{\mathrm{def}}{=} \zeta^{-1} : \otimes_p(V^{(a,n-a)}) \to \otimes^p(V^{(a,n-a)})$ が定義される．テンソル積と外積について，

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{\mu_p} &= g_{\mu_1\nu_1} \cdots g_{\mu_p\nu_p} \kappa(\vec{e}^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}^{\nu_p}) \\ \vec{e}^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}^{\mu_p} &= g^{\mu_1\nu_1} \cdots g^{\mu_p\nu_p} \zeta(\vec{e}_{\nu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{\nu_p}) \end{aligned}\right\} \tag{1.103}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_{\mu_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\mu_p} &= g_{\mu_1\nu_1} \cdots g_{\mu_p\nu_p} \kappa(\vec{e}^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \vec{e}^{\nu_p}) \\ \vec{e}^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \vec{e}^{\mu_p} &= g^{\mu_1\nu_1} \cdots g^{\mu_p\nu_p} \zeta(\vec{e}_{\nu_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\nu_p}) \end{aligned}\right\} \tag{1.104}$$

が成り立つ．

符号数 $(a, n-a)$ の計量 g をもつ計量線型空間 $V^{(a,n-a)}$ が与えられているとき，双対空間 $(V^{(a,n-a)})^*$ に対して，g^* を次式により定義する：

$$g^*(f_1, f_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} g(\kappa(f_1), \kappa(f_2)), \quad \forall f_1, f_2 \in (V^{(a,n-a)})^* \tag{1.105}$$

命題 1.3.15. このとき g^* は $(V^{(a,n-a)})^*$ の符号数 $(a, n-a)$ の計量である．g の $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ に関する成分を $g_{\mu\nu}$ とし，g^* の，$(V^{(a,n-a)})^*$ の基底 $\zeta(\mathcal{E}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\zeta(\vec{e}_1), \cdots, \zeta(\vec{e}_n)\}$ に関する成分および $\mathcal{E}^*$ に関する成分をそれぞれ ${g^*}_{\mu\nu}$ および $G^{\mu\nu}$ とすると，${g^*}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}, G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ である．$\mathcal{E}$ が $V^{(a,n-a)}$ の正規直交基底であるならば，$\mathcal{E}^*$ と $\zeta(\mathcal{E})$ はいずれも $(V^{(a,n-a)})^*$ の正規直交基底である[24)].

証明：$\zeta : V^{(a,n-a)} \to (V^{(a,n-a)})^*$ が線型同型写像であることおよび (1.101) により，g が $V^{(a,n-a)}$ の計量であるならば g^* は $(V^{(a,n-a)})^*$ の符号数 $(a, n-a)$ の計量であることは容易にわかる．${g^*}_{\mu\nu} \stackrel{\mathrm{def}}{=} g^*(\zeta(\vec{e}_\mu), \zeta(\vec{e}_\nu)) = g(\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu) = g_{\mu\nu}$ であり，また，$G^{\mu\nu} \stackrel{\mathrm{def}}{=} g^*(\vec{e}^\mu, \vec{e}^\nu) = g^*(g^{\mu\lambda}\zeta(\vec{e}_\lambda), g^{\nu\rho}\zeta(\vec{e}_\rho)) = g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}g(\vec{e}_\lambda, \vec{e}_\rho) = g^{\mu\nu}$ である．なお，ここで $\zeta(\vec{e}_\mu) = g_{\mu\nu}\vec{e}^\nu$ を用いた．命題の残りの部分が成り立つことは明白である．かくて命題は証明された．

23) well-defined に相当する適切な日本語を思いつかないので，ここでは英語を用いることにする．

24) $\mathcal{E}$ が $V^{(a,n-a)}$ の正規直交基底 $\{\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n\}$ であるときは，$\zeta(\vec{E}_i) = g_{ij}\vec{E}^j = \eta_{ij}\vec{E}^j \ (i = 1, 2, \cdots, n)$ である．$\zeta(\mathcal{E}) \neq \mathcal{E}^* = \{\vec{E}^1, \cdots, \vec{E}^n\}$ であることに注意．

計量 g^* のことを，g に**同伴する計量**という．

標準的な教科書では，$\otimes^p(V^{(a,n-a)})$ の元 t と $\otimes_p(V^{(a,n-a)})$ の元 $\zeta(t)$ とを同一視して，これらを記号上も区別せずに扱っている場合が多い．

1.3.3　演算積

内部積を用いて，計量線型空間 $V^{(a,n-a)}$ における交代反変（共変）テンソルと反変（共変）ベクトルの演算積を導入しよう．第4章で示すように，荷電物質に作用する電磁力は演算積を用いて表示される．

定義 1.3.3. $p=1,2,\cdots,n$ として，$V^{(a,n-a)}$ 上の p 階交代反変テンソル s，反変ベクトル $\vec{u}$ に対して

$$\vec{u}\oslash s \overset{\text{def}}{=} \kappa(i(\vec{u})\zeta(s)) \tag{1.106}$$

により $\vec{u}\oslash s$ を定義し，さらに $s\oslash\vec{u} \overset{\text{def}}{=} (-1)^{p-1}\vec{u}\oslash s$ とおき，これらのことを $\vec{u}$ と s の**演算積**という．

$\vec{u}\oslash s$，$s\oslash\vec{u}$ は共に $p-1$ 階交代反変テンソルである．$\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ を $V^{(a,n-a)}$ の基底として，$s=(1/p!)s^{\mu_1\cdots\mu_p}\vec{e}_{\mu_1}\curlywedge\cdots\curlywedge\vec{e}_{\mu_p}$，$\vec{u}=u^\mu\vec{e}_\mu$ と表すと[25)]，(1.81)，(1.102) および (1.104) を用いて示されるように，

$$\vec{u}\oslash s = \frac{1}{(p-1)\,!}u_\nu s^{\nu\mu_1\cdots\mu_{p-1}}\vec{e}_{\mu_1}\curlywedge\cdots\curlywedge\vec{e}_{\mu_{p-1}} \tag{1.107}$$

である．ここに $u_\nu \overset{\text{def}}{=} g_{\nu\lambda}u^\lambda$ とする．とくに，$p=1$ の場合，すなわち s が反変ベクトルである場合，$\vec{v}\overset{\text{def}}{=}s$ とおくと，$\vec{u}\oslash\vec{v}=\vec{v}\oslash\vec{u}=g(\vec{u},\vec{v})$ である．任意の実数 a_i $(i=1,2)$，任意の反変ベクトル $\vec{u}_i,\vec{u}$，任意の p 階交代反変テンソル s_i,s に対して以下の関係式（分配律）が成り立つ：

$$\left.\begin{aligned}(a_1\vec{u}_1+a_2\vec{u}_2)\oslash s &= a_1(\vec{u}_1\oslash s)+a_2(\vec{u}_2\oslash s)\\ \vec{u}\oslash(a_1s_1+a_2s_2) &= a_1(\vec{u}\oslash s_1)+a_2(\vec{u}\oslash s_2)\end{aligned}\right\} \tag{1.108}$$

---

25) 交代テンソルの成分は交代であるようにとってあるものとする．

命題 1.3.16. $p=2,3\cdots,n$ とするとき，任意の反変ベクトル $\vec{u}$，任意の p 階交代反変テンソル s に対して以下の式が成り立つ：

$$\vec{u}\oslash(\vec{u}\oslash s)=0=(s\oslash\vec{u})\oslash\vec{u} \tag{1.109}$$

証明： (1.107) と $s^{\mu_1\cdots\mu_p}$ が交代であることにより[26)]，

$$\vec{u}\oslash(\vec{u}\oslash s)=\frac{1}{(p-2)\,!}u_\nu u_\lambda s^{\lambda\nu\mu_1\cdots\mu_{p-2}}\vec{e}_{\mu_1}\curlywedge\cdots\curlywedge\vec{e}_{\mu_{p-2}}=0 \tag{1.110}$$

となり，また $\vec{u}\oslash(\vec{u}\oslash s)=-(s\oslash\vec{u})\oslash\vec{u}$ である．したがって，命題が成立する．

命題 1.3.17. $V^{(a,n-a)}$ から $A^p(V^{(a,n-a)})$ への線型写像 f が存在して

$$f(\vec{u})\oslash\vec{u}=0,\quad \forall\vec{u}\in V^{(a,n-a)} \tag{1.111}$$

であるならば，f に対応して $p+1$ 階交代反変テンソル s が一意的に定まり

$$f(\vec{u})=s\oslash\vec{u}=(-1)^p\vec{u}\oslash s \tag{1.112}$$

と表される．ただし，$p=1,2,\cdots,n-1$ とする．

この命題は前命題の逆命題であり，第 4 章では，この命題と磁界による力についての観測事実に基づいて磁束密度が一意的な仕方で導入される．

さらに，共変ベクトル v と p 階交代共変テンソル t に対して，

$$v\oslash t\overset{\text{def}}{=}\zeta\{\kappa(v)\oslash\kappa(t)\} \tag{1.113}$$

とする．ここに，$p=1,2,\cdots,n$ とし，また右辺における $\oslash$ は反変ベクトルと交代反変テンソルとの演算積を表すものとする．さらに $t\oslash v\overset{\text{def}}{=}(-1)^{p-1}v\oslash t$ として，v と t との演算積 $v\oslash t$, $t\oslash v$ を定義する．これらに対して (1.108), 命題 1.3.16, 1.3.17 に対応する公式，命題が成り立つ．

演算積と内部積はいずれも線型空間の向き付けによらないが，前者は計量線型空間上の交代テンソルについて定義されているのに対し，後者は計量の存在もテンソルの交代性も前提としていないことに注意しよう．

---

26) $p=2$ の場合は，(1.110) の中央の辺は $u_\nu u_\lambda s^{\lambda\nu}$ と理解する．

1.3.4 Hodgeの星印作用素

命題 1.3.18. 向き付けられた計量線型空間 $V_o^{(a,n-a)}$ 上の正の n 次交代形式 ω_V で, 任意の正の正規直交基底 $(\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n)$ に対して $\omega_V(\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n)=1$ であるようなものが一意的に存在する.

証明: $\mathcal{A}^\sharp{}_n(V_o)$ は0でない n 次交代形式の全体であって, その1つの元を ϑ とすると, $\mathcal{A}^\sharp{}_n(V_o)=\{k\vartheta|k\in R, k\neq 0\}$ である. 正の n 次交代形式 ω が1つ与えられたとき, k を正数として $\omega_V\stackrel{\text{def}}{=}k\omega$ とすると ω_V は正の n 次交代形式であって, k の値を適当にとることにより, ある1つの正の正規直交基底 $\mathcal{E}_o=(\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n)$ に対して $\omega_V(\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n)=1$ であるようにすることができる. 任意の正の正規直交基底 $\mathcal{E}'{}_o=(\vec{E}'{}_1,\cdots,\vec{E}'{}_n)$ を考える. 命題1.3.11, および $\mathcal{E}_o$, $\mathcal{E}'{}_o$ が同じ向きに属していることにより, (1.86) で $\det K=1$ とした関係が成り立つ. これらのことと (1.87) により, $\omega_V(\vec{E}'{}_1,\cdots,\vec{E}'{}_n)=(\det K)\omega_V(\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n)=1$ を得る. またこのような ω_V の一意性は明白である. よって命題が証明された.

上記の ω_V のことを**正の単位 n 次交代形式**という.

命題 1.3.19. $\mathcal{E}_o=(\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n)$ を正の正規直交基底, $\mathcal{E}^*{}_o=(\vec{E}^1,\cdots,\vec{E}^n)$ をその双対基底とすると

$$\omega_V=\vec{E}^1\wedge\cdots\wedge\vec{E}^n \tag{1.114}$$

である[27].

証明: $\mathcal{E}'{}_o=(\vec{E}'{}_1,\cdots,\vec{E}'{}_n)$ を正の正規直交基底とすると, これは $\mathcal{E}_o$ と (1.86) で $\det K=1$ とした関係式で結ばれている. (1.74) と $\vec{E}^i(\vec{E}_j)=\delta^i{}_j$ を用いて容易に示されるように, $(\vec{E}^1\wedge\cdots\wedge\vec{E}^n)(\vec{E}'{}_1,\cdots,\vec{E}'{}_n)=(\det K)(\vec{E}^1\wedge\cdots\wedge\vec{E}^n)(\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n)=1$ である. (1.114) の右辺が正の交代形式であることは明らかである. これらのことと前命題により, 本命題が成り立つことがわかる.

---

27) **表示 (1.114) はすべての正の正規直交基底 $\mathcal{E}_o$ に対して共通の形**である. すなわち, $\mathcal{E}'{}_o=(\vec{E}'{}_1,\cdots,\vec{E}'{}_n)$ を任意の正の正規直交基底, $\mathcal{E}'^*{}_o=(\vec{E}'^1,\cdots,\vec{E}'^n)$ をその双対基底とすると $\omega_V=\vec{E}'^1\wedge\cdots\wedge\vec{E}'^n$ である.

$\mathcal{E}=(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)$ を $V_o^{(a,n-a)}$ の基底，$\mathcal{E}^*=(\vec{e}^1,\cdots,\vec{e}^n)$ をその双対基底として，$\omega\in A_p(V_o^{(a,n-a)})$ とする．$p\geq 1$ の場合，

$$\omega=\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}\vec{e}^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\vec{e}^{\mu_p} \tag{1.115}$$

と表すことにして

$$\star\omega\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}\omega\omega_V \quad (p=0)\\ \displaystyle\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p}\omega_{\mu_1\cdots\mu_p}i(\kappa(\vec{e}^{\mu_p}))\cdots i(\kappa(\vec{e}^{\mu_1}))\omega_V\\ (p=1,2,\cdots,n)\end{cases} \tag{1.116}$$

により $\star\omega$ を定義し，これを交代形式 ω の**共役**という．ただし，i は内部積を表す記号であり，また κ は (1.100) で定義される ζ の逆写像 $\kappa\overset{\text{def}}{=}\zeta^{-1}:(V^{(a,n-a)})^*\to V^{(a,n-a)}$ である．

命題 1.3.20. (1.116) の右辺は，基底 $\mathcal{E}$ のとり方によらない．

証明： $p=0$ の場合は自明．$p\geq 1$ の場合を考えよう．$V_o^{(a,n-a)}$ の任意の基底 $\mathcal{E}'=(\vec{e}'_1,\cdots,\vec{e}'_n)$ とその双対基底 $\mathcal{E}'^*=(\vec{e}'^1,\cdots,\vec{e}'^n)$ をとって，ω を

$$\omega=\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p}{\omega'}_{\mu_1\cdots\mu_p}\vec{e}'^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge\vec{e}'^{\mu_p} \tag{1.117}$$

と表す．$p\geq 1$ の場合の (1.116) の右辺は，この基底をとった場合，

$$\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p}{\omega'}_{\mu_1\cdots\mu_p}i(\kappa(\vec{e}'^{\mu_p}))\cdots i(\kappa(\vec{e}'^{\mu_1}))\omega_V \tag{1.118}$$

となる．これが (1.116) の右辺の $p\geq 1$ の場合についての表示と一致することを示せばよい．関係式 $\zeta(\vec{e}_\mu)=g_{\mu\nu}\vec{e}^\nu$ から直ちにわかるように，$\kappa(\vec{e}^\mu)=g^{\mu\nu}\vec{e}_\nu, \kappa(\vec{e}'^\mu)=g'^{\mu\nu}{\vec{e}'}_\nu$ である．したがって $p\leq n-1$ の場合，$\vec{v}_j\ (j=1,2,\cdots,n-p)$ を $V_o^{(a,n-a)}$ の任意のベクトルとすると，

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p}{\omega'}_{\mu_1\cdots\mu_p}i(\kappa(\vec{e}'^{\mu_p}))\cdots i(\kappa(\vec{e}'^{\mu_1}))\omega_V\right)(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p})\\ &\quad=\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p}{\omega'}_{\mu_1\cdots\mu_p}\omega_V(g'^{\mu_1\nu_1}{\vec{e}'}_{\nu_1},\cdots,g'^{\mu_p\nu_p}{\vec{e}'}_{\nu_p},\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p})\\ &\quad=\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p}\omega'^{\mu_1\cdots\mu_p}\omega_V({\vec{e}'}_{\mu_1},\cdots,{\vec{e}'}_{\mu_p},\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p})\end{aligned} \tag{1.119}$$

である．ここに，$\omega'^{\mu_1\cdots\mu_p} \stackrel{\text{def}}{=} g'^{\mu_1\nu_1}\cdots g'^{\mu_p\nu_p}\omega'_{\nu_1\cdots\nu_p}$ とした．さらに，基底 $\mathcal{E}'$ と $\mathcal{E}$ とは (1.86) で表される関係にあるものとすると，$\omega'^{\mu_1\cdots\mu_p}K^{\nu_1}{}_{\mu_1}\cdots K^{\nu_p}{}_{\mu_p} = \omega^{\nu_1\cdots\nu_p} \stackrel{\text{def}}{=} g^{\nu_1\lambda_1}\cdots g^{\nu_p\lambda_p}\omega_{\lambda_1\cdots\lambda_p}$ である．このことを用いると (1.119) は

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p} \omega'_{\mu_1\cdots\mu_p} i(\kappa(\vec{e}'^{\mu_p}))\cdots i(\kappa(\vec{e}'^{\mu_1}))\omega_V\right)(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p}) \\
&\quad = \sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p} \omega^{\mu_1\cdots\mu_p}\omega_V(\vec{e}_{\mu_1},\cdots,\vec{e}_{\mu_p},\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p}) \\
&\quad = \left(\sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p} \omega_{\mu_1\cdots\mu_p} i(\kappa(\vec{e}^{\mu_p}))\cdots i(\kappa(\vec{e}^{\mu_1}))\omega_V\right)(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p})
\end{aligned} \tag{1.120}
$$

となる．また，$p=n$ の場合は，(1.119)，(1.120) で，$\vec{v}_j$ $(j=1,2,\cdots,n-p)$ をすべて削除した式が成り立つ．以上によって命題が成り立つことがわかる．

上の証明からわかるように，

$$
\left.
\begin{aligned}
&\star\omega = \omega^{1\cdots n}\omega_V(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n) \qquad (p=n) \\
&(\star\omega)(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p}) \\
&\quad = \sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p} \omega^{\mu_1\cdots\mu_p}\omega_V(\vec{e}_{\mu_1},\cdots,\vec{e}_{\mu_p},\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1\le p\le n-1)
\end{aligned}
\right\} \tag{1.121}
$$

である．この式と $p=0$ の場合の表示 $\star\omega = \omega\omega_V$ からわかるように，$\star\omega \in A_{n-p}(V_o^{(a,n-a)})$ である．

命題 1.3.21. $\star$ は $A_p(V_o^{(a,n-a)})$ から $A_{n-p}(V_o^{(a,n-a)})$ の上への線型同型写像である．

写像 $\star : A_p(V_o^{(a,n-a)}) \to A_{n-p}(V_o^{(a,n-a)})$ のことを **Hodge の星印作用素**という[28]．

[28] 線型空間の向きには 2 通りあり，そのどちらを正の向きと指定するかに応じて，対応する星印作用素も 2 通りある．上の $\star$ の定義における向きと逆の向きを正の向きと指定した場合の星印作用素を $\hat{\star}$ とすると，$\hat{\star} = -\star$ である．

命題 1.3.22. $\mathcal{E}_o=(\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n)$ を $V_o^{(a,n-a)}$ の正の正規直交基底，${\mathcal{E}^*}_o=(\vec{E}^1,\cdots,\vec{E}^n)$ をその双対基底とすると，$p=0,1,2,\cdots,n$ に対して

$$\star(\vec{E}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{i_p})=\frac{1}{(n-p)\,!}{\varepsilon^{i_1\cdots i_p}}_{j_1\cdots j_{n-p}}\vec{E}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{j_{n-p}} \tag{1.122}$$

である．ここに ${\varepsilon^{i_1\cdots i_p}}_{j_1\cdots j_{n-p}}$ は $\varepsilon_{\sigma(1)\cdots\sigma(n)}\overset{\text{def}}{=}\text{sgn}(\sigma)$ として

$${\varepsilon^{i_1\cdots i_p}}_{j_1\cdots j_{n-p}}\overset{\text{def}}{=}\eta^{i_1k_1}\cdots\eta^{i_pk_p}\varepsilon_{k_1\cdots k_pj_1\cdots j_{n-p}} \tag{1.123}$$

と定義されているものとする．なお，(1.122) において $p=0$ の場合，$p=n$ の場合は，それぞれ，$\star 1=\vec{E}^1\wedge\cdots\wedge\vec{E}^n$ および $\star(\vec{E}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{i_n})=\varepsilon^{i_1\cdots i_n}\overset{\text{def}}{=}\eta^{i_1j_1}\cdots\eta^{i_nj_n}\varepsilon_{j_1\cdots j_n}$ と理解する．

命題 1.3.23. 向き付けられた n 次元計量線型空間 $V_o^{(a,n-a)}$ 上の p 次交代形式 ω に対して

$$\star(\star\omega)=(-1)^{a+p(n-p)}\omega \tag{1.124}$$

が成り立つ[29)]．

証明：$p=0$ の場合および $p=n$ の場合に (1.124) が成り立つことは，$\varepsilon^{i_1\cdots i_n}=(-1)^a\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$ に注意して (1.122) を用いれば容易にわかる．$1\leq p\leq n-1$ の場合について考える．$\star$ は線型写像であるから，$\mathcal{A}_p(V_o^{(a,n-a)})$ のある基底の任意の元に対して (1.124) が成り立てば，任意の $\omega\in A_p(V_o^{(a,n-a)})$ に対しても (1.124) が成り立つ．ところで，(1.122) を用いると任意の $i_1,\cdots,i_p=1,2,\cdots,n$ に対して

$$\begin{aligned}
&\star(\star(\vec{E}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{i_p}))\\
&\quad=\frac{1}{(n-p)\,!}{\varepsilon^{i_1\cdots i_p}}_{j_1\cdots j_{n-p}}\star(\vec{E}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{j_{n-p}})\\
&\quad=\frac{1}{(n-p)\,!}\frac{1}{p\,!}{\varepsilon^{i_1\cdots i_p}}_{j_1\cdots j_{n-p}}{\varepsilon^{j_1\cdots j_{n-p}}}_{k_1\cdots k_p}\vec{E}^{k_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{k_p}\\
&\quad=(-1)^{a+p(n-p)}\vec{E}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{i_p}
\end{aligned} \tag{1.125}$$

---

29) $\hat{\star}$ に対しても，(1.124) と同様の関係式 $\hat{\star}(\hat{\star}\omega)=(-1)^{a+p(n-p)}\omega$ が成り立つ．一般に星印作用素が偶数回作用する場合，その結果は線型空間の向き付けに依存しない．

であることがわかる．したがって，$1 \leq p \leq n-1$ の場合も (1.124) が成り立つ．以上により命題が証明された．

写像 $G_p : A_p(V_o^{(a,n-a)}) \times A_p(V_o^{(a,n-a)}) \to R$ を次式により定義する：

$$G_p(\omega, \vartheta)\omega_V \overset{\text{def}}{=} \omega \wedge \star\vartheta, \quad \forall(\omega, \vartheta) \in A_p(V_o^{(a,n-a)}) \times A_p(V_o^{(a,n-a)}) \tag{1.126}$$

命題 1.3.24. G_p は ${}_n\mathrm{C}_p$ 次元線型空間 $A_p(V_o^{(a,b)}) \overset{\text{def}}{=} A_p(V_o^{(a,n-a)})$ の符号数 (A, B) の計量である．ここに，

$$\left.\begin{aligned} A &\overset{\text{def}}{=} {}_n\mathrm{C}_p - B \\ B &\overset{\text{def}}{=} \sum_{m \leq 2k \leq M} {}_a\mathrm{C}_{2k} \times {}_b\mathrm{C}_{p-2k} \end{aligned}\right\} \tag{1.127}$$

である．ただし，k は整数，$m \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Max}\{0, p-b\}$, $M \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Min}\{a, p\}$ として，$i < j$ に対しては ${}_i\mathrm{C}_j = 0$ とする．また，(1.127) の第2式において，$m \leq 2k \leq M$ を満足する整数 k が存在しない場合には $B = 0$ と理解する．

証明：$p = 0$ の場合および $p = n$ の場合については，(1.122) を用いることによって容易に示される．$p = 1, 2, \cdots, n-1$ の場合について考える．$(\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n)$ を $V_o^{(a,n-a)}$ の正の正規直交基底として，$\omega, \vartheta \in A_p(V_o^{(a,n-a)})$ を

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{p!}\omega_{i_1 \cdots i_p}\vec{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \vec{E}^{i_p} \\ \vartheta &= \frac{1}{p!}\vartheta_{i_1 \cdots i_p}\vec{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \vec{E}^{i_p} \end{aligned}\right\} \tag{1.128}$$

と表すと，(1.122) を用いて

$$\begin{aligned} \omega \wedge \star\vartheta &= \frac{1}{p!\,(n-p)!}\omega_{i_1 \cdots i_p}\vartheta_{k_1 \cdots k_p}\varepsilon^{k_1 \cdots k_p}{}_{j_1 \cdots j_{n-p}} \\ &\quad \times \vec{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \vec{E}^{i_p} \wedge \vec{E}^{j_1} \wedge \cdots \wedge \vec{E}^{j_{n-p}} \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1 \cdots i_p}\vartheta^{i_1 \cdots i_p}\omega_V \end{aligned} \tag{1.129}$$

を得る．ここに，$\vartheta^{i_1 \cdots i_p} = \eta^{i_1 j_1} \cdots \eta^{i_p j_p}\vartheta_{j_1 \cdots j_p}$ とした．したがって (1.126) により

$$G_p(\omega, \vartheta) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1 \cdots i_p}\vartheta^{i_1 \cdots i_p} \tag{1.130}$$

となる．

$V_o^{(a,n-a)}$ の計量テンソル g の正規直交基底に関する成分の対角部分 η_{ii} $(i = 1, 2, \cdots, n)$ のうち a 個が -1 であり $b\,(= n - a)$ 個が 1 であることに注意すると，(1.130) の右辺の ${}_n\mathrm{C}_p$ 個の項の和において，$\omega_{i_1 \cdots i_p} \vartheta_{i_1 \cdots i_p}$ がマイナスされている項の数およびプラスされている項の数は，それぞれ (1.127) の A および B で与えられることがわかる．G_p が $A_p(V_o^{(a,n-a)})$ 上の対称 2 階共変テンソルであることは (1.130) から明らかである．よって，命題が成り立つ．

上の証明からわかるように，$(\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n)$ を $V_o^{(a,n-a)}$ の正規直交基底とすると，$\{\vec{E}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \vec{E}^{i_p} | i_1 < \cdots < i_p\}$ は $A_p(V_o^{(a,n-a)})$ の正規直交基底である．また，$\omega, \vartheta \in A_p(V_o^{(a,n-a)})$ に対して

$$\omega \wedge \star\vartheta = \vartheta \wedge \star\omega \tag{1.131}$$

が成り立つ．

$(V^{(a,n-a)})^*{}_o$ を $V_o^{(a,n-a)}$ の計量 g に同伴する計量 g^* が定義され，また $V_o^{(a,n-a)}$ の向きに同伴する向き付けがなされている計量線型空間とする．このとき，上と並行な仕方で $(V^{(a,n-a)})^*{}_o$ 上の正の単位 n 次交代形式，交代反変テンソルの共役および Hodge の星印作用素[30] $* : A_p((V^{(a,n-a)})^*{}_o) \to A_{n-p}((V^{(a,n-a)})^*{}_o)$ および $A_p((V^{a,n-a})^*{}_o)$ の計量 $G^p : A_p((V^{(a,n-a)})^*{}_o) \times A_p((V^{(a,n-a)})^*{}_o) \to R$ が定義され，命題 1.3.18〜1.3.24 に対応する命題が成り立つ．なお，$A_p((V^{(a,n-a)})^*{}_o) = A^p(V_o^{(a,n-a)})$ であることに注意．また，命題 1.3.22 における $V_o^{(a,n-a)}$ の正の正規直交基底 $\mathcal{E}_o = (\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n)$ の双対基底 $\mathcal{E}^*{}_o = (\vec{E}^1, \cdots, \vec{E}^n)$ は $(V^{(a,n-a)})^*{}_o$ の正の正規直交基底であり，式 (1.122) に双対な関係式

$$\left.\begin{aligned} &*(\vec{E}_{i_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{E}_{i_p}) \\ &\quad = \frac{1}{(n-p)\,!} \varepsilon_{i_1 \cdots i_p}{}^{j_1 \cdots j_{n-p}} \vec{E}_{j_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{E}_{j_{n-p}} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (p = 0, 1, \cdots, n) \end{aligned}\right\} \tag{1.132}$$

30) ここで，前出の作用素 $\star : A_p(V_o^{(a,n-a)}) \to A_{n-p}(V_o^{(a,n-a)})$ と区別するために記号 $*$ を用いる．両者を混同しないように，また星印作用素 $*$ と線型空間 V の双対空間 V^* における上付きの添字 $*$ とを混同しないように．なお，$\hat{\star}$ に対応して星印作用素 $\hat{*} = -*$ も定義される．

が成り立つ．ここに

$$\varepsilon_{i_1\cdots i_p}{}^{j_1\cdots j_{n-p}} \overset{\text{def}}{=} \eta^{j_1 k_1}\cdots\eta^{j_{n-p}k_{n-p}}\varepsilon_{i_1\cdots i_p k_1\cdots k_{n-p}} \tag{1.133}$$

と定義されているものとする．なお，(1.132) において，$p=0$ の場合，$p=n$ の場合は，それぞれ $*1=\vec{E}_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{E}_n$ および $*(\vec{E}_{i_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{E}_{i_n}) = \varepsilon_{i_1\cdots i_n}$ と理解する．

向き付けられた計量線型空間 $V_o^{(a,n-a)}$ 上の p 階交代反変テンソル，すなわち $A^p(V_o^{(a,n-a)})$ の元 t に対して次式が成り立つ：

$$*t=\kappa(\star\zeta(t)), \quad \zeta(*t)=\star\zeta(t) \tag{1.134}$$

命題 1.3.25. $V_o^{(a,n-a)}$ 上の，反変ベクトル $\vec{u}$，p 階交代反変テンソル s，共変ベクトル v，p 階交代共変テンソル t に対して，

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}\oslash s &= (-1)^{a+p(n-p)} * \{(*s)\curlywedge \vec{u}\} \\ v\oslash t &= (-1)^{a+p(n-p)} \star \{(\star t)\wedge v\} \end{aligned}\right\} \tag{1.135}$$

が成り立つ．ここに，$p=1,2,\cdots,n$ とする．

証明：$(\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n)$ を正の正規直交基底とする．$\vec{u}=u^i\vec{E}_i$, $s=(1/p!)s^{j_1\cdots j_p}\vec{E}_{j_1}\curlywedge\cdots\curlywedge\vec{E}_{j_p}$ と表すと，

$$\begin{aligned} &(*s)\curlywedge\vec{u} \\ &\quad = \frac{1}{p!\,(n-p)!}u^i s^{j_1\cdots j_p}\varepsilon_{j_1\cdots j_p}{}^{k_1\cdots k_{n-p}}\vec{E}_{k_1}\curlywedge\cdots\curlywedge\vec{E}_{k_{n-p}}\curlywedge\vec{E}_i \end{aligned} \tag{1.136}$$

である．この両辺にさらに $*$ を作用させると

$$\begin{aligned} *\{(*s)\curlywedge\vec{u}\} &= \frac{1}{p!\,(n-p)!\,(p-1)!} \\ &\qquad \times u_i s^{j_1\cdots j_p}\varepsilon_{j_1\cdots j_p}{}^{k_1\cdots k_{n-p}}\varepsilon_{k_1\cdots k_{n-p}}{}^{il_1\cdots l_{p-1}}\vec{E}_{l_1}\curlywedge\cdots\curlywedge\vec{E}_{l_{p-1}} \\ &= \frac{(-1)^{a+p(n-p)}}{(p-1)!}u_i s^{ij_1\cdots j_{p-1}}\vec{E}_{j_1}\curlywedge\cdots\curlywedge\vec{E}_{j_{p-1}} = (-1)^{a+p(n-p)}\vec{u}\oslash s \end{aligned} \tag{1.137}$$

が得られ，(1.135) の第1式が成り立つことがわかる．同様に第2式も成り立つ．

$n \geq 2$ のとき，向き付けられた n 次元計量線形空間 $V_o^{(a,n-a)}$ において，$n-1$ 個のベクトル $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_{n-1}$ に対して

$$[\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_{n-1}] \stackrel{\text{def}}{=} *(\vec{u}_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{u}_{n-1}) \\ = \kappa\{\star(\zeta(\vec{u}_1) \wedge \cdots \wedge \zeta(\vec{u}_{n-1}))\} \qquad (1.138)$$

によって定義されるベクトル $[\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_{n-1}]$ のことをベクトル $\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_{n-1}$ の**ベクトル積**という．なお，$*(\vec{u}_1 \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{u}_{n-1}) = \kappa\{\star(\zeta(\vec{u}_1) \wedge \cdots \wedge \zeta(\vec{u}_{n-1}))\}$ であることは，(1.104)，(1.134) によって保証されている．とくに $n=3$ の場合に対して次の命題が成り立つ：

命題 1.3.26. $V_o^{(a,3-a)}$ において，$(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ を正の正規直交基底とすると，ベクトル $\vec{u} = u^i \vec{E}_i, \vec{v} = v^i \vec{E}_i$ に対して

$$[\vec{u}, \vec{v}] = u^i v^j \varepsilon_{ij}{}^k \vec{E}_k \qquad (1.139)$$

であり，とくに向き付けられた 3 次元 Euclid 的線型空間 V_o^3 については

$$[\vec{u}, \vec{v}] = (u^2 v^3 - u^3 v^2)\vec{E}_1 + (u^3 v^1 - u^1 v^3)\vec{E}_2 + (u^1 v^2 - u^2 v^1)\vec{E}_3 \qquad (1.140)$$

である．

証明：$*(\vec{u} \curlywedge \vec{v}) = u^i v^j * (\vec{E}_i \curlywedge \vec{E}_j) = u^i v^j \varepsilon_{ij}{}^k \vec{E}_k$ により，命題の前半部分が成り立つことがわかる．ここに (1.132) を用いた．V_o^3 の場合について，これを具体的に書き下すと，(1.140) を得る．

また，$[\vec{u}, \vec{v}]$ の演算積，内部積による表示：

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{v} \oslash (*\vec{u}) = -\vec{u} \oslash (*\vec{v}) \\ = \kappa\{i(\vec{v})\zeta(*\vec{u})\} = -\kappa\{i(\vec{u})\zeta(*\vec{v})\} \qquad (1.141)$$

が成り立つ．

向き付けられた 3 次元 Euclid 空間において，$(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$ が**右手系**を構成する場合，(1.140) は力学や電磁気学等の通例の記述に現れるベクトル積

の表示と一致する[31]．なお，**ベクトル積は $V_o^{(a,n-a)}$ の計量と向きの双方に依存するが，外積はそのどちらにも依存しない概念である**ことに注意しよう．

1.3.5　Minkowski 的線型空間の基本的性質

この部分節では，特殊相対論において重要な役割を果たす Minkowski 的線型空間の基礎的事項を述べる．現段階では，まだ物理学に入り込んでいないのであるが，言葉だけは“物理用語”を先回りして使うことにする．それら“物理用語”には，物理的意味はまだ付与されていないのであって，当面は，単なる記号と思っておいて頂きたい[32]．

$n+1$ 次元 Minkowski 的線型空間 $V^{(1,n)}$ を考える．$V^{(1,n)}$ の，$g(\vec{u},\vec{u})<0$ を満足する元 $\vec{u}$ のことを**時間的ベクトル**という．また，$V^{(1,n)}$ の $g(\vec{u},\vec{u})=0, \vec{u}\neq\vec{0}$ を満足する元 $\vec{u}$ のことを**光的ベクトル**[33]，$V^{(1,n)}$ の $g(\vec{u},\vec{u})>0$ を満足する元 $\vec{u}$ のことを**空間的ベクトル**という．$V^{(1,n)}$ の元は，零ベクトル，時間的ベクトル，光的ベクトル，空間的ベクトルのいずれかである．

以下では，Minkowski 的線型空間 $V^{(1,n)}$ の正規直交基底 $\mathcal{E}=\{\vec{E}_0,\vec{E}_1,\cdots,\vec{E}_n\}$ は，

$$\left.\begin{aligned} \eta_{00}&=g(\vec{E}_0,\vec{E}_0)=-1,\quad \eta_{0i}=g(\vec{E}_0,\vec{E}_i)=0\\ \eta_{ij}&=g(\vec{E}_i,\vec{E}_j)=\delta_{ij}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}\right\}\tag{1.142}$$

が成り立つように番号付けされているものとする．ここに，$\delta_{ii}=1, \delta_{ij}=0\ (i\neq j)$ とする．

命題 1.3.27. 時間的ベクトルと直交するベクトルは零ベクトルあるいは空間的ベクトルである．

---

[31] 向き付けられた 3 次元 Euclid 空間とそこにおける右手系の定義については，第 3 章の **3.12** 節を参照．なお，**ベクトル積のことを外積とよぶ本も多いが，これを本書における外積と混同してはならない**．

[32] 形式的な建前の上では物理的意味は与えられていないが，“本音”では物理を念頭においている．物理的描像を想起しながら読んだ方がわかりやすい読者はそのようにして頂いて結構である．

[33] 光的ベクトルのことを**ヌル・ベクトル**（あるいは**臨界ベクトル**）とよぶこともある．

証明: $\vec{u}$ を時間的ベクトル，$\vec{v}$ を $\vec{u}$ と直交するベクトルとする．零ベクトル $\vec{0}$ が時間的ベクトルと直交することは明白である．$\vec{v}\neq\vec{0}$ の場合を考える．Minkowski 的線型空間 $V^{(1,n)}$ の正規直交基底 $\mathcal{E}$ を (1.142) を満足するように選び，$\vec{u}=u^i\vec{E}_i, \vec{v}=v^i\vec{E}_i$ と表す．$\vec{u}$ は時間的ベクトルであり，また $\vec{u}$ と $\vec{v}$ とは直交するのであるから[34]，

$$g(\vec{u},\vec{u})=-(u^0)^2+\sum_{a=1}^{n}(u^a)^2<0 \tag{1.143}$$

$$g(\vec{u},\vec{v})=-u^0v^0+\sum_{a=1}^{n}u^av^a=0 \tag{1.144}$$

が成り立つ．(1.144) と Schwarz の不等式により

$$(u^0v^0)^2=\left(\sum_{a=1}^{n}u^av^a\right)^2\leq\sum_{a=1}^{n}(u^a)^2\sum_{b=1}^{n}(v^b)^2 \tag{1.145}$$

となるが，このことと (1.143) および $\vec{v}\neq\vec{0}$ により，

$$g(\vec{v},\vec{v})=-(v^0)^2+\sum_{a=1}^{n}(v^a)^2>0 \tag{1.146}$$

すなわち，$\vec{v}$ $(\neq\vec{0})$ は空間的ベクトルであることがわかる．

なお，$n\geq 2$ である限り，「空間的ベクトルに直交するベクトルは時間的ベクトルであるか，零ベクトルである」という命題は成り立たないことに注意しよう．

命題 1.3.28. 時間的ベクトル $\vec{t}$ を 1 つ固定する．$S\overset{\mathrm{def}}{=}\{\vec{u}\in V^{(1,n)}|g(\vec{u},\vec{t})=0\}$ とおいて g を $S\times S$ に制限したものを h とする．S は $V^{(1,n)}$ の n 次元部分線型空間であって，h は S の Euclid 計量である．また，a を 0 でない任意の与えられた実数とするとき，$S_a\overset{\mathrm{def}}{=}\{\vec{u}\in V^{(1,n)}|g(\vec{u},a\vec{t})=0\}=S$ である．さらに，ベクトル $\vec{t}$ によって張られる線型空間を $[\vec{t}\,]$ と表すと，これは $V^{(1,n)}$ の 1 次元部分線型空間であって，$-g$ を $[\vec{t}\,]\times[\vec{t}\,]$ に制限したものを k とすると，k は $[\vec{t}\,]$ の Euclid 計量である．

---

34) 以下では，Minkowski 的線型空間の正規直交基底，ベクトル，テンソルの正規直交基底に関する成分等の “空間的部分” に対応する添数 $1,2,\cdots,n$ を表すために $a,b,c,\ldots$ 等，英語のアルファベットの最初の部分を用いることにする．

証明：S が，$V^{(1,n)}$ の部分線型空間であって，その次元数が n であることは，命題 1.3.4 から明らかである．命題 1.3.27 によれば，S の任意のベクトル $\vec{u}$ に対して $h(\vec{u},\vec{u}) = g(\vec{u},\vec{u}) \geq 0$ であり，$h(\vec{u},\vec{u}) = 0$ であるのは $\vec{u} = \vec{0}$ であるとき，かつそのときに限られる．ゆえに，命題 1.3.12 により，h は Euclid 計量である．$S_a = S$ であることは，$g(\vec{u}, a\vec{t}) = ag(\vec{u},\vec{t})$ であることによって明らかである．また，明らかに $\dim[\vec{t}\,] = 1$ であり，k が Euclid 計量であることも容易に示される．

上の命題により，**時間的単位ベクトル**，すなわち $g(\vec{E}_0,\vec{E}_0) = -1$ を満足するベクトル $\vec{E}_0$ が1つ与えられると，a を0でない実数とするとき $a\vec{E}_0$ に対応して定まる S_a は a に依存せず共通かつ一意的に n 次元 Euclid 的線型空間 S が定まる．そこで，この線型空間のことを $S^n(\vec{E}_0)$ と表すことにする．命題 1.3.5 によれば，$V^{(1,n)} = [\vec{E}_0] \oplus S^n(\vec{E}_0)$ である．

直和分解 $V^{(1,n)} = [\vec{E}_0] \oplus S^n(\vec{E}_0)$ を $V^{(1,n)}$ の $\vec{E}_0$ による **Minkowski 分解**とよぶ．

本書の以下の部分においては，Minkowski 的線型空間の Euclid 的な部分線型空間の元を表すには $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \cdots$ というように太文字（boldfaced letter）を用いることにする．

命題 1.3.29. $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ はすべて時間的ベクトルであるものとする．$g(\vec{u},\vec{v}) < 0$ かつ $g(\vec{v},\vec{w}) < 0$ であるならば，$g(\vec{u},\vec{w}) < 0$ である．また，$g(\vec{u},\vec{v}) > 0$ かつ $g(\vec{v},\vec{w}) > 0$ であるならば，$g(\vec{u},\vec{w}) < 0$ である．

証明：$\vec{E}_0 \overset{\text{def}}{=} \vec{v}/\sqrt{-g(\vec{v},\vec{v})}$ とおくと $\vec{E}_0$ は時間的単位ベクトルであり，$\vec{v} = v^0\vec{E}_0$, $v^0 \overset{\text{def}}{=} \sqrt{-g(\vec{v},\vec{v})}$ である．このとき $\vec{u},\vec{w}$ は，それぞれ $\vec{u} = u^0\vec{E}_0 + \mathbf{u}$, $g(\vec{E}_0,\mathbf{u}) = 0$, $\vec{w} = w^0\vec{E}_0 + \mathbf{w}$, $g(\vec{E}_0,\mathbf{w}) = 0$ という形に一意的に表される．$\vec{u},\vec{w}$ は共に時間的ベクトルであるから，

$$g(\vec{u},\vec{u}) = -(u^0)^2 + h(\mathbf{u},\mathbf{u}) < 0, \quad g(\vec{w},\vec{w}) = -(w^0)^2 + h(\mathbf{w},\mathbf{w}) < 0 \tag{1.147}$$

である．これらの式と Schwarz の不等式により，$|u^0w^0| > \sqrt{h(\mathbf{u},\mathbf{u})h(\mathbf{w},\mathbf{w})} \geq |h(\mathbf{u},\mathbf{w})|$ である．ゆえに，$g(\vec{u},\vec{w})$ の符号は $-u^0w^0$ の符号と同一である．また，$g(\vec{v},\vec{u}) = -v^0u^0$, $g(\vec{v},\vec{w}) = -v^0w^0$ である．$g(\vec{u},\vec{v}) < 0$, $g(\vec{v},\vec{w}) < 0$ とすると，

$v^0u^0 > 0$, $v^0w^0 > 0$，したがって $u^0w^0 > 0$ であり，さらには $g(\vec{u}, \vec{w}) < 0$ であることになる．かくて本命題の前半部分が証明された．また，$g(\vec{u}, \vec{v}) > 0$, $g(\vec{v}, \vec{w}) > 0$ とすると，$g(-\vec{u}, \vec{v}) < 0$, $g(\vec{v}, -\vec{w}) < 0$ である．したがって $g(\vec{u}, \vec{w}) = g(-\vec{u}, -\vec{w}) < 0$ となり，後半部分が成り立つことがわかる．ここで命題の前半部分を用いた．

なお，命題 1.3.27 によれば，$\vec{u}, \vec{v}$ が共に時間的ベクトルならば $g(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$ であることに注意しよう．

次に，時間的ベクトル，光的ベクトルの向き付けを考える．

時間的ベクトル全体の集合を $\mathcal{Z}$ とする．$\mathcal{Z}$ の 2 元 $\vec{u}, \vec{v}$ について，$g(\vec{u}, \vec{v}) < 0$ であるとき，かつそのときに限り，$\vec{u} \approx \vec{v}$ とする．

命題 1.3.30. 上の定義で導入された $\approx$ は同値関係であり，集合 $\mathcal{Z}$ の $\approx$ による商集合 $\mathcal{Z}/\approx$ の元の数は 2 である．

証明：$\mathcal{Z}$ の任意の元 $\vec{u}$ に対して $\vec{u} \approx \vec{u}$ であること，$\vec{u} \approx \vec{v}$ であるならば $\vec{v} \approx \vec{u}$ であることは，$\mathcal{Z}$ の定義により明らかである．また，前命題の前半部分によって $\vec{u} \approx \vec{v}, \vec{v} \approx \vec{w}$ であるならば $\vec{u} \approx \vec{w}$ である．したがって，$\approx$ は同値関係の定義（= 定義 B.9）の条件 **[E1]**〜**[E3]** をすべて満足する．ゆえに，$\approx$ は同値関係である．また，$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ をすべて $\mathcal{Z}$ の元とするとき，$\vec{u} \not\approx \vec{v}, \vec{v} \not\approx \vec{w}$ であるならば，前命題の後半部分によって $\vec{u} \approx \vec{w}$ である．したがって，$\mathcal{Z}/\approx$ の元の数は 2 である．

定義 1.3.4. $\mathcal{Z}/\approx$ の元，すなわち $\mathcal{Z}$ の $\approx$ による同値類を，Minkowski 的線型空間 $V^{(1,n)}$ の**時間的向き**という．さらに一方を指定して $V^{(1,n)}$ の**正の時間的向き**，他方を**負の時間的向き**という．正，負の時間的向きが指定されている Minkowski 的線型空間は**時間的に向き付けられている**という．正の時間的向き，負の時間的向きをそれぞれ $\mathcal{Z}_+, \mathcal{Z}_-$ と記す．$\mathcal{Z}_+$（$\mathcal{Z}_-$）の元を**正（負）の時間的ベクトル**という．

なお，$\mathcal{Z}, \mathcal{Z}_+, \mathcal{Z}_-$ はいずれも線型空間ではない．時間的に向き付けられている Minkowski 的線型空間の基底 $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ において，$\vec{e}_\mu$（$\mu = 0, 1, \cdots, n$）の内の 1 つが正（負）の時間的ベクトルであり，他の n 個がすべて時間的ベクトルでないとき $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ は**時間的に正（負）の基

底であるという[35)]．また，正（負）の時間的ベクトルである単位ベクトルのことを**正（負）の時間的単位ベクトル**という．

命題 1.3.31. $\vec{u}$ を光的ベクトルとする．ある正の時間的ベクトル $\vec{p}$ に対して $g(\vec{p},\vec{u}) < 0$ $(g(\vec{p},\vec{u}) > 0)$ であるならば，任意の正の時間的ベクトル $\vec{q}$ に対して $g(\vec{q},\vec{u}) < 0$ $(g(\vec{q},\vec{u}) > 0)$ である．

証明：$\vec{p}$ を正の時間的ベクトルとして，$g(\vec{p},\vec{u}) < 0$ とする．任意の正数 ε に対して，$g(\vec{u}+\varepsilon\vec{p},\vec{u}+\varepsilon\vec{p}) = g(\vec{u},\vec{u}) + 2\varepsilon g(\vec{p},\vec{u}) + \varepsilon^2 g(\vec{p},\vec{p}) = 2\varepsilon g(\vec{p},\vec{u}) + \varepsilon^2 g(\vec{p},\vec{p}) < 0$, $g(\vec{p},\vec{u}+\varepsilon\vec{p}) = g(\vec{p},\vec{u})+\varepsilon g(\vec{p},\vec{p}) < 0$ となり，$\vec{u}+\varepsilon\vec{p}$ は正の時間的ベクトルであることがわかる．したがって，任意の正の時間的ベクトル $\vec{q}$ に対して $g(\vec{q},\vec{u}+\varepsilon\vec{p}) < 0$ である．ここで，$\varepsilon \to 0$ とすると $g(\vec{q},\vec{u}) \leq 0$ が得られるから，命題 1.3.27 によって $g(\vec{q},\vec{u}) < 0$ である．同様にして，$g(\vec{p},\vec{u}) > 0$ ならば $g(\vec{q},\vec{u}) > 0$ であることが示される．かくて命題が成り立つことがわかった．

上の命題にのっとり，時間的に向き付けられた Minkowski 的線型空間の光的ベクトル $\vec{u}$ は，ある正の時間的ベクトル $\vec{p}$ に対して $g(\vec{p},\vec{u}) < 0$ $(g(\vec{p},\vec{u}) > 0)$ であるとき，**正（負）の光的ベクトル**であるという．

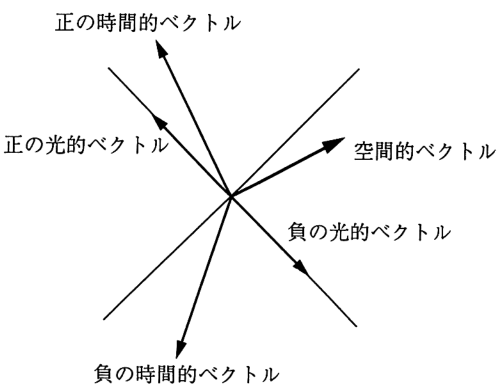


図 1.3　正，負の時間的ベクトル，正，負の光的ベクトル，空間的ベクトル

命題 1.3.31 は，光的ベクトル $\vec{u}$ の正（負）はそれを定義する際に用いた正

35)　以下では，このような基底 $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ においては，$\vec{e}_0$ が時間的ベクトルであるように番号付けするものとする．

の時間的ベクトル $\vec{p}$ のとり方によらず一意的に定まることを保証する．命題 1.3.27 によれば，時間的ベクトル $\vec{p}$，光的ベクトル $\vec{u}$ に対して，$g(\vec{p},\vec{u}) \neq 0$ である．したがって，光的ベクトルは正か負のいずれかである．

命題 1.3.32. 時間的に向き付けられた Minkowski 的線型空間において，$\vec{e}_0$ を正の時間的ベクトルとして，ベクトル $\vec{u}$ を $\vec{u} = u^0\vec{e}_0 + \mathbf{u}$, $g(\vec{e}_0, \mathbf{u}) = 0$ と表す．(1) $\vec{u}$ が正（負）の時間的ベクトルであるための必要十分条件は，$g(\vec{u},\vec{u}) < 0$ かつ $u^0 > 0$ $(u^0 < 0)$ であることである．(2) $\vec{u}$ が正（負）の光的ベクトルであるための必要十分条件は，$g(\vec{u},\vec{u}) = 0$ かつ $u^0 > 0$ $(u^0 < 0)$ であることである．

証明：$\vec{u} = u^0\vec{e}_0 + \mathbf{u}$, $g(\vec{e}_0, \mathbf{u}) = 0$ とすると，$u^0 = g(\vec{u},\vec{e}_0)/g(\vec{e}_0,\vec{e}_0)$ である．したがって，命題が成り立つことは明らかである．

$\vec{e}_0$ が負の時間的ベクトルである場合については，正負の関係を逆にした対応する命題が成り立つ．

定義 1.3.5. 光的ベクトル全体の集合，正（負）の光的ベクトル全体の集合を，それぞれ $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}_+$ （$\mathcal{Y}_-$）と表す．すなわち，$\mathcal{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{u} \in V^{(1,n)} | g(\vec{u},\vec{u}) = 0, \vec{u} \neq 0\}$，$\mathcal{Y}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{u} \in \mathcal{Y} | g(\vec{u},\vec{e}_0) < 0, \exists \vec{e}_0 \in \mathcal{Z}_+\}$，$\mathcal{Y}_- \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{u} \in \mathcal{Y} | g(\vec{u},\vec{e}_0) > 0, \exists \vec{e}_0 \in \mathcal{Z}_+\}$ とする．

命題 1.3.33. (1) $\vec{u},\vec{v}$ を共に $\mathcal{Z}_+$ （$\mathcal{Z}_-$）に属するベクトルとして a,b を共に正数とすると，和 $a\vec{u}+b\vec{v}$ は $\mathcal{Z}_+$ （$\mathcal{Z}_-$）に属するベクトルである．(2) $\vec{u},\vec{v}$ を共に $\mathcal{Z}_+ \cup \mathcal{Y}_+$ （$\mathcal{Z}_- \cup \mathcal{Y}_-$）に属するベクトルとして a,b を共に正数とすると，和 $a\vec{u}+b\vec{v}$ は $\mathcal{Z}_+ \cup \mathcal{Y}_+$ （$\mathcal{Z}_- \cup \mathcal{Y}_-$）に属するベクトルである．

証明：(1) $\vec{E}_0$ を正の時間的単位ベクトルとする．$\vec{u},\vec{v}$ を共に $\mathcal{Z}_+$ に属するベクトルすなわち正の時間的ベクトルとして，$\vec{u} = u^0\vec{E}_0 + \mathbf{u}$, $g(\vec{E}_0,\mathbf{u}) = 0$, $\vec{v} = v^0\vec{E}_0 + \mathbf{v}$, $g(\vec{E}_0,\mathbf{v}) = 0$ と表す．前命題と時間的ベクトルの定義により，$u^0 > |\mathbf{u}|$, $v^0 > |\mathbf{v}|$ である．したがって $u^0 + v^0 > |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \geq |\mathbf{u}+\mathbf{v}|$ である．ここで命題 1.3.13 の (4) を用いた．したがって，$\vec{u}+\vec{v}$ は $\mathcal{Z}_+$ に属するベクトル，すなわち正の時間的ベクトルである．同様にして，$\mathcal{Z}_-$ に属するベクトルの和は $\mathcal{Z}_-$ に属することも示される．また，$\vec{u} \in \mathcal{Z}_+$ （$\vec{u} \in \mathcal{Z}_-$）ならば任意の正数 a に対して，$a\vec{u} \in \mathcal{Z}_+$ （$a\vec{u} \in \mathcal{Z}_-$）

であることは明らかである．以上によって (1) が成り立つことがわかる．(2) $\vec{u}, \vec{v}$ が共に $\mathcal{Z}_+ \bigcup \mathcal{Y}_+$ に属するベクトル，すなわち正の時間的ベクトルまたは正の光的ベクトルの場合にも $\vec{u}, \vec{v}$ を (1) におけるのと同様に表すと，$u^0 \geq |\mathbf{u}|$, $v^0 \geq |\mathbf{v}|$ であり，したがって $u^0 + v^0 \geq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| \geq |\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ となって $\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{Z}_+ \bigcup \mathcal{Y}_+$ であることがわかる．同様にして，$\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{Z}_- \bigcup \mathcal{Y}_-$ ならば $\vec{u} + \vec{v} \in \mathcal{Z}_- \bigcup \mathcal{Y}_-$ であることがわかる．以下，(1) の場合と同様にして (2) が成り立つことが示される．

2 つの正（あるいは負）の光的ベクトル同士の和は光的ベクトルとは限らない．2 つの空間的ベクトルの和は空間的ベクトルとは限らない．

定義 1.3.6. Minkowski 的線型空間は，それが定義 1.3.1 の意味で向き付けられているとき，**時空的に向き付けられている**という．

命題 1.3.34. 2 つの正規直交基底 $\{\vec{E}_0, \vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n\}$, $\{\vec{E}'_0, \vec{E}'_1, \cdots, \vec{E}'_n\}$ を結ぶ変換，すなわち Lorentz 基底変換

$$\vec{E}'_i = K^j{}_i \vec{E}_j, \quad \det K \neq 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{1.148}$$

は，次の形に表される：

$$K = \begin{pmatrix} \epsilon_t & 0 \\ 0 & \epsilon_s D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \mathbf{B} \\ \gamma^T \mathbf{B} & \mathbf{I}_n + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma} C \end{pmatrix} \tag{1.149}$$

ただし，

$$\epsilon_t \stackrel{\text{def}}{=} \frac{K^0{}_0}{|K^0{}_0|}, \quad D \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon_s G, \quad \epsilon_s \stackrel{\text{def}}{=} \det G \tag{1.150}$$

$$G \stackrel{\text{def}}{=} K^{\{n\}} \left(\mathbf{I}_n - \frac{\gamma}{1+\gamma} C \right), \quad \gamma \stackrel{\text{def}}{=} |K^0{}_0| \tag{1.151}$$

$$\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} (\beta_1, \cdots, \beta_n) \tag{1.152}$$

$$C \stackrel{\text{def}}{=} (C^a{}_b) \stackrel{\text{def}}{=} (\beta^a \beta_b), \quad K^{\{n\}} \stackrel{\text{def}}{=} (K^a{}_b) \tag{1.153}$$

$$\beta_a \stackrel{\text{def}}{=} \beta^a \stackrel{\text{def}}{=} \frac{K^0{}_a}{K^0{}_0} \quad (a, b = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.154}$$

であり，${}^T\mathbf{B}, \mathbf{I}_n$ は，それぞれ $\mathbf{B}$ を転置して得られる縦ベクトルおよび n 次の単位行列を表す．

証明： (1.96) は，この場合

$$\eta_{ij} = K^k{}_i \eta_{kl} K^l{}_j, \ \ \eta^{ij} = K^i{}_k \eta^{kl} K^j{}_l \quad (i, j = 0, 1, \cdots, n) \tag{1.155}$$

$$\left.\begin{array}{l} \eta_{00} = -1, \ \eta_{0a} = 0 = \eta_{a0}, \ \eta_{ab} = \delta_{ab} \\ \eta^{00} = -1, \ \eta^{0a} = 0 = \eta^{0a}, \ \eta^{ab} = \delta^{ab} \end{array} \quad (a, b = 1, 2, \cdots, n) \right\} \tag{1.156}$$

となる．ここに，$\delta^{aa} = 1, \delta^{ab} = 0 \ \ (a \neq b)$ である．これから $|K^0{}_0| \geq 1$, $(\det K)^2 = 1$ が帰結する．したがって，(1.149)~(1.154) に現れる量はすべて well-defined である．(1.155) の第 2 式で $i = j = 0$ の場合を考え γ, β_a の定義を用いることによって，

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{a=1}^{n} (\beta_a)^2} \tag{1.157}$$

を得る．D の定義式の両辺に右から

$$\epsilon_s \left(\mathbf{I}_n + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} C \right) \tag{1.158}$$

を作用させることによって

$$K^{\{n\}} = \epsilon_s D \left(\mathbf{I}_n + \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} C \right) \tag{1.159}$$

を得る．(1.155) の第 2 式で $i = 1, 2, \cdots, n$, $j = 0$ の場合を考えて，β^b の定義を用いると，$K^a{}_0 = \sum_{b=1}^{n} K^a{}_b \beta^b \ \ (a = 1, 2, \cdots, n)$ が得られる．このことと，(1.153) の第 2 式，(1.157) および (1.159) により，

$$K^a{}_0 = \epsilon_s \gamma \sum_{b=1}^{n} D^a{}_b \beta^b \quad (a = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.160}$$

であることがわかる．ただし，$D^a{}_b$ は D の行列要素を表す．これらをまとめて行列の形で表現すると (1.149) を得る．

γ の定義と $|K^0{}_0| \geq 1$ および (1.157) により，$\gamma \geq 1$, $\beta < 1$ である．

命題 1.3.35. 行列 D について，

$$D^T D = {}^T D \, D = 1, \quad \det D = 1 \tag{1.161}$$

である．ここに，${}^T D$ は D の転置行列を表す．

証明：(1.155) の第2式で，$a, b = 1, 2, \cdots, n$ の場合を考えて，(1.157)，(1.159) および (1.160) を用いると，(1.161) の第1式を得る．この第1式と (1.150) の第2および第3式より，$\det D = (\det G)^2 = 1$ が得られる．

明らかに，$\epsilon_t = \pm 1$, $\epsilon_s = \pm 1$ である．

命題 1.3.36.

$$K(\mathbf{B}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \mathbf{B} \\ \gamma^T \mathbf{B} & \mathbf{I}_n + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma} C \end{pmatrix} \tag{1.162}$$

とおくと，

$$K(\mathbf{B})K(-\mathbf{B}) = K(-\mathbf{B})K(\mathbf{B}) = \mathbf{I}_{n+1}, \quad \det K(\mathbf{B}) = 1 \tag{1.163}$$

である．また，$K(\mathbf{B}) = \mathbf{I}_{n+1}$ であるのは $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ であるとき，かつそのときに限られる．

証明：(1.152)，(1.153) および (1.157) を用いて容易に示すことができる．

なお，(1.149) の右辺は2つの行列の積であるが，これらの各行列それ自身が (1.155) を満足し，Lorentz 基底変換を与える．

命題 1.3.37. Minkowski 的線型空間 $V^{(1,n)}$ の2つの正規直交基底 $\{\vec{E}'_0, \vec{E}'_1, \cdots, \vec{E}'_n\}$, $\{\vec{E}_0, \vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n\}$ の関係を (1.148)，(1.149) のように表すものとする．これら2つの基底の関係について以下のことが成り立つ：

(1) $V^{(1,n)}$ が時空的に向き付けられている場合，これらの基底が同一の（異なる）時空的向きに属するための必要十分条件は $\epsilon_t \epsilon_s = 1$ $(\epsilon_t \epsilon_s = -1)$ であることである．

(2) $V^{(1,n)}$ が時間的に向き付けられている場合，これらの基底が同一の（異なる）時間的向きに属するための必要十分条件は $\epsilon_t = 1$ $(\epsilon_t = -1)$ であることである．

証明：(1) を示そう．定義 1.3.1 により，これらの基底が同一の（異なる）向きに属するための必要十分条件は $\det K > 0$ $(\det K < 0)$ が成り立つことであるが，K を (1.149) のように表すと前命題を用いて示されるように $\det K = \epsilon_t \epsilon_s$ となる

ので，(1) が成り立つ．さらに，(1.148) と ϵ_t の定義式（$=$(1.150) の第 1 式）により $g(\vec{E}'_0, \vec{E}_0) = -|K^0{}_0|\epsilon_t$ であるから，(2) が成り立つことは明らかである．

$V_o^{(1,n)}$ を時空的に向き付けられかつ時間的に向き付けられた Minkowski 的線型空間とする．以下にみるように，この線型空間は自然な仕方で空間的に向き付けられる：$\vec{e}_0$ を任意の時間的ベクトルとして，$S^n \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u} \in V_o^{(1,n)} | g(\vec{e}_0, \mathbf{u}) = 0\}$ とする．$\vec{e}_0$ が正（負）の時間的ベクトルである場合，$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} 1$（$\epsilon \stackrel{\text{def}}{=} -1$）とおいて，正の時間的単位ベクトル $\vec{E}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon\vec{e}_0/\sqrt{-g(\vec{e}_0, \vec{e}_0)}$ を考える．$(\vec{E}_0, \vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n)$ を $V_o^{(1,n)}$ の正の正規直交基底として，$(\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n)$ がその正の向きに属するように，S^n の向きを指定する．

命題 1.3.38. 任意の与えられた時間的ベクトル $\vec{e}_0$ に対応して定まる S^n の上述の仕方によって指定される向きは，$V_o^{(1,n)}$ の $\vec{E}_0$ を含む正の正規直交基底 $(\vec{E}_0, \vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n)$ の選び方によらない．

証明: $\vec{E}'_0 = \vec{E}_0$ とおいて，$\vec{E}_0$ を含む 2 つの組 $(\vec{E}_0, \vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n)$, $(\vec{E}'_0, \vec{E}'_1, \cdots, \vec{E}'_n)$ を共に $V_o^{(1,n)}$ の正の正規直交基底とする．(1.149) を用いて容易に示されるように，これらを結ぶ Lorentz 基底変換は，$D = (D^j{}_i)$ を ${}^T D\, D = D\, {}^T D = 1, \det D = 1$ である n 次の正方行列として，

$$\vec{E}'_0 = \vec{E}_0, \quad \vec{E}'_a = \epsilon_s \sum_{b=1}^{n} D^b{}_a \vec{E}_b \quad (a = 1, 2, \cdots, n) \tag{1.164}$$

と表される．ここで，$(\vec{E}_0, \vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n)$, $(\vec{E}'_0, \vec{E}'_1, \cdots, \vec{E}'_n)$ が共に正の正規直交基底であることにより，$\epsilon_s = 1$ である．ゆえに，$(\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n)$ と $(\vec{E}'_1, \cdots, \vec{E}'_n)$ とは S^n の同じ向きに属する．したがって，命題が成り立つ．

定義 1.3.7. 各時間的ベクトル $\vec{e}_0$ ごとに対応する S^n の向きを上述の仕方で指定してあるとき，$V_o^{(1,n)}$ は**空間的に向き付けられている**という．

第2章　アフィン空間と曲面

この章では，アフィン空間，その特別な場合である計量アフィン空間，さらにその特殊な例である Minkowski 空間，Euclid 空間およびこれらの空間における曲面について述べる．アフィン空間に対しては向きの概念が定義され，Minkowski 空間では，時空的向き付け，時間的向き付け，空間的向き付けの概念が定義される．特殊相対論は,「時間－空間は，時空的にも時間的にも，かつ空間的にも向き付けられた 4 次元 Minkowski 空間である」ということを基本的前提の 1 つとする．

2.1　アフィン空間

2.1.1　アフィン空間，座標枠，座標

アフィン空間はベクトルによる平行移動が定義された空間であり，Euclid 空間はその一例である．

定義 2.1.1. n 次元線型空間 V と集合 M とがあり，以下の条件 [**A1**]，[**A2**]，[**A3**] がすべて満足されているとき系 $\mathcal{M} \stackrel{\text{def}}{=} \{M; V\}$ のことを n 次元**アフィン空間**といい，M, V をそれぞれ $\mathcal{M}$ の**基礎集合**，**同伴線型空間**という：

[**A1**]　V の任意のベクトル $\vec{u}$ に対応して写像 $F_{\vec{u}} : M \to M$ が定まる．

[**A2**]　M の任意の与えられた 2 元 P, Q に対して

$$F_{\vec{u}}(P) = Q \tag{2.1}$$

であるような $\vec{u}$ が一意的に存在する．

[**A3**]　V の任意の 2 つのベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ に対して次式が成り立つ：

$$F_{\vec{v}} \circ F_{\vec{u}} = F_{\vec{u}+\vec{v}} \tag{2.2}$$

とくに，1 次元アフィン空間，2 次元アフィン空間のことを，それぞれ**アフィン直線**，**アフィン平面**という．写像 $F_{\vec{u}} : M \to M$ のことをベクトル $\vec{u}$ に対応する**平行移動**という．また，$P \in M, \vec{u} \in V$ に対して $F_{\vec{u}}(P)$ のことを $P + \vec{u}$ と表す：

$$P + \vec{u} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\vec{u}}(P) \tag{2.3}$$

条件 [**A2**] によれば，同一の平行移動を与えるベクトルは一意的である．すなわち，$F_{\vec{u}} = F_{\vec{v}}$ であるのは $\vec{u} = \vec{v}$ であるときかつそのときに限る．P, Q に対応して [**A2**] によって定まる $\vec{u}$ のことを $\overrightarrow{PQ}$ と表す．また，M の元のことを**点**という．

(2.3) で定義される記号を用いると，(2.1), および (2.2) の両辺による P の像は，それぞれ

$$P + \vec{u} = Q \tag{2.4}$$

$$(P + \vec{u}) + \vec{v} = P + (\vec{u} + \vec{v}) \tag{2.5}$$

となる．(2.5) とベクトルの和の演算 $+$ の可換性によって明らかなように，M の任意の点 P，V の任意のベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ に対して

$$(P + \vec{u}) + \vec{v} = (P + \vec{v}) + \vec{u} \tag{2.6}$$

である．

命題 2.1.1. 以下のことが成り立つ：

(1) M の任意の 3 点 P, Q, R に対して

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} \tag{2.7}$$

である．

(2) $F_{\vec{x}} = I$ であるための必要十分条件は $\vec{x} = \vec{0}$ であることである．ここに，I は M における**恒等変換**[1] を表す．

(3) M の任意の 2 点 P, Q に対して，$Q = P + \vec{u}$ であるときかつそのときに限り $P = Q + (-\vec{u})$ である．

(4) V の任意のベクトル $\vec{u}$ に対して，写像 $F_{\vec{u}} : M \to M$ は**全単写**である．

---

1) 付録 **B** の定義 B.6 を参照．

証明: (1) を示そう．(2.4), (2.5) により，$P+(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR})=(P+\overrightarrow{PQ})+\overrightarrow{QR}=Q+\overrightarrow{QR}=R=P+\overrightarrow{PR}$ である．このことと，アフィン空間の定義 (= 定義 2.1.1) の条件 [**A2**] により，(1) が成り立つことがわかる．次に，(2) を示す．条件 [**A2**] により，M の任意の点 P に対して $F_{\vec{x}}(P)=P$ なる $\vec{x}$ が一意的に定まる．$Q \stackrel{\mathrm{def}}{=} F_{\vec{0}}(P)$ とすると，$Q=F_{\vec{0}}(P)=F_{\vec{0}}(F_{\vec{x}}(P))=F_{\vec{0}+\vec{x}}(P)=F_{\vec{x}}(P)=P$ となる．ここで，条件 [**A3**] を用いた．したがって $\vec{x}=\vec{0}$ である．つまり (2) が成り立つ．(3) を示そう．$Q=P+\vec{u}$ とすると，$Q+(-\vec{u})=(P+\vec{u})+(-\vec{u})=P+(\vec{u}+(-\vec{u}))=P+\vec{0}=P$ となる．なお，ここで (2.5) と (2) を用いた．また，$Q+(-\vec{u})=P$ とすると $Q=P+\vec{u}$ であることも容易に示され，(3) が成り立つことがわかる．(4) を示す．V の任意のベクトル $\vec{u}$ と M の任意の点 Q について $P \stackrel{\mathrm{def}}{=} F_{-\vec{u}}(Q)$ とすると，[**A3**] と (2) によって $F_{\vec{u}}(P)=F_{\vec{u}}(F_{-\vec{u}}(Q))=F_{\vec{u}-\vec{u}}(Q)=F_{\vec{0}}(Q)=Q$ が得られる．したがって $F_{\vec{u}}$ は全写である．また，$F_{\vec{u}}(P)=F_{\vec{u}}(P')$ とすると $P=F_{\vec{0}}(P)=F_{-\vec{u}}(F_{\vec{u}}(P))=F_{-\vec{u}}(F_{\vec{u}}(P'))=F_{\vec{0}}(P')=P'$ となる．ここで再び [**A3**] と (2) を用いた．したがって $F_{\vec{u}}$ は単写である．かくて (4) が示された．

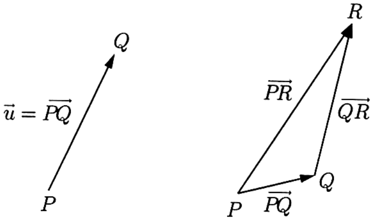


図 2.1 点とベクトル

上の命題の (1) から

$$\overrightarrow{PP}=\vec{0},\quad \overrightarrow{PQ}=-\overrightarrow{QP} \tag{2.8}$$

が得られる．

n 次元線型空間 V について $\{V;V\}$ を考え，V の任意のベクトル $\vec{u}$ に対応して写像 $F_{\vec{u}}\ :V\to V$ を $F_{\vec{u}}(\vec{P}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \vec{P}+\vec{u}, \forall\vec{P}\in V$ で定義する．ここに + は線型空間 V における和を表す．これにより，$\{V;V\}$ はアフィン空間となり，$F_{\vec{u}}$ は $\vec{u}$ に対応する平行移動になっている．このアフィン空間にあっては，V が基礎集合でありかつ同伴線型空間である．すなわち，**線型空間 V それ自身をアフィン空間と見なすことができる．**

n 次元アフィン空間 $\mathcal{M} = \{M; V\}$ を考える．条件 [**A1**]，[**A2**] によれば，M の点 O を 1 つ定めると，同伴線型空間 V のベクトル $\vec{x}(P)$ と M の点 P とは $\vec{x}(P) = \overrightarrow{OP}$ なる関係によって 1 対 1 に対応する．ベクトル $\vec{x}(P)$ を，O を**原点**とする点 P の**位置ベクトル**とよぶ．原点を定めた上では M の点は位置ベクトルによって表すことができる．さらに V の基底 $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ をとると，$\vec{x}(P)$ は $\vec{x}(P) = x^\mu(P)\vec{e}_\mu$, $x^\mu(P) \in R$ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$ と一意的に表される．結局，M の原点 O と V の基底 $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ を定めると，M の点 P は n 個の実数 $x^\mu(P)$ の組 $(x^1(P), \cdots, x^n(P))$ によって一意的に表されることになる．また，このとき M の各点 P に $x^\mu(P)$ を対応させる M 上の関数 x^μ が定まる．

定義 2.1.2. 原点 O と基底 $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ の組 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ のことをアフィン空間 $\mathcal{M}$ の**アフィン座標枠**（あるいは単に**座標枠**）という．また，関数 x^μ の組 $(x^1, \cdots, x^n)$ および実数 $x^\mu(P)$ の組 $(x^1(P), \cdots, x^n(P))$ のことを，それぞれ座標枠 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ に関する**座標系**および P の**座標**という．

n 次元アフィン空間の座標枠のとり方には無限に多くの可能性がある．

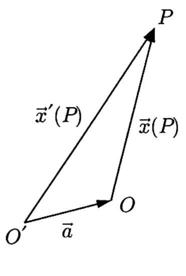


図 **2.2** 原点，位置ベクトル

命題 2.1.2. 2 つの座標枠 $[O'; \{\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n\}]$, $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ を考える．点 P の O', O を原点とする位置ベクトル $\vec{x}'(P) \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{O'P}$, $\vec{x}(P) \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{OP}$ について

$$\vec{x}'(P) = \vec{x}(P) + \vec{a} \tag{2.9}$$

が成り立つ．ここに $\vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{O'O}$ とした．さらに，これらの座標枠に関する座標系 $(x'^1, \cdots, x'^n)$, $(x^1, \cdots, x^n)$ の間には次の関係がある：

$$x'^\mu = K^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.10}$$

ただし,

$$\vec{e}_\mu = K^\nu{}_\mu \vec{e}'{}_\nu, \quad \vec{a} = a^\nu \vec{e}'{}_\nu \tag{2.11}$$

と表した.

証明： 命題 2.1.1 の（1）によって $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OP}$ が成り立つことにより，命題の前半部分は明らかである．後半部分も，(2.9) に $\vec{x}'(P) = x'^\nu(P)\vec{e}'{}_\nu$, $\vec{x}(P) = x^\mu(P)\vec{e}_\mu$ および (2.11) を代入して，$\{\vec{e}'{}_1, \cdots, \vec{e}'{}_n\}$ の線型独立性を用いることによって容易に示される．

なお，命題 1.1.6 により，$K^\nu{}_\mu$ を要素とする行列 $K \stackrel{\text{def}}{=} (K^\nu{}_\mu)$ は正則行列である．座標枠の変換，$[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}] \to [O'; \{\vec{e}'{}_1, \cdots, \vec{e}'{}_n\}]$ を**アフィン座標枠変換**（あるいは単に**座標枠変換**）という．命題 2.1.2 はアフィン座標枠変換の内容の具体的表示を与えている．

定義 2.1.3. 2 つのアフィン空間 $\mathcal{M} = \{M; V\}, \mathcal{N} = \{N; W\}$ において，次の 3 つの条件 **[SA1]**〜**[SA3]** がすべて満足されているとき，$\mathcal{N}$ は $\mathcal{M}$ の**部分アフィン空間**であるという：

[SA1] N は M の部分集合である．

[SA2] W は V の部分線型空間である．

[SA3] $P \in N, \vec{w} \in W$ であるとき，$\mathcal{N}$ において点 $R \stackrel{\text{def}}{=} G_{\vec{w}}(P)$ が定まる．$P \in M$, $\vec{w} \in V$ であるから $\mathcal{M}$ において点 $Q \stackrel{\text{def}}{=} F_{\vec{w}}(P)$ が定まるが，$Q = R$ である．ただし，$F_{\vec{w}}, G_{\vec{w}}$ はそれぞれ $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ における $\vec{w}$ に対応する平行移動を表す．

とくに，n 次元アフィン空間 $\mathcal{M}$ の 1 次元部分アフィン空間，$n-1$ 次元部分アフィン空間を，それぞれ $\mathcal{M}$ 上の**アフィン直線**，**アフィン超平面**という．

$\mathcal{M}$ の点 P_0 を含む部分アフィン空間 $\mathcal{N}$ が次のように構成される．

命題 2.1.3. n 次元アフィン空間 $\mathcal{M} = \{M; V\}$ において，1 点 P_0 と V の r 次元部分線型空間 W が与えられているとき，$N \stackrel{\text{def}}{=} F_W(P_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{F_{\vec{w}}(P_0) | \vec{w} \in W\}$ とすると，$\mathcal{N} = \{N; W\}$ は $\mathcal{M}$ の r 次元部分アフィン空間である．

命題 2.1.4. アフィン空間 $\mathcal{M}=\{M;V\}$ の部分アフィン空間 $\mathcal{N}=\{N;W\}$ の基礎集合 N は，P_0 を N の任意の点として，$N=F_W(P_0)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{F_{\vec{w}}(P_0)|\vec{w}\in W\}$ と表される．とくに，$\mathcal{M}$ 上のアフィン直線 $\mathcal{L}=\{L;X\}$ については，P_0 を L の任意の点，$\vec{e}$ を X の $\vec{e}\neq\vec{0}$ なる任意の元とすると $L=\{F_{\lambda\vec{e}}(P_0)|\lambda\in R\}$ である．

証明： 部分アフィン空間の定義（=定義 2.1.3）からわかるように，$\mathcal{N}$ における平行移動 $G_{\vec{w}}$ は $\mathcal{M}$ における平行移動 $F_{\vec{w}}$ を N に制限したものと一致する．このこととアフィン空間の定義により，命題の前半部分が成り立つことがわかる．また，アフィン直線 $\mathcal{L}$ の同伴線型空間 X の次元数は 1 であることから，命題の後半部分が成り立つことは明白である．

$[O;\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}]$ をアフィン空間 $\mathcal{M}=\{M;V\}$ の座標枠とする．$\mathcal{M}$ 上の n 個のアフィン直線 $\mathcal{A}_\mu\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{A_\mu;[\vec{e}_\mu]\}$，$A_\mu\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{F_{\lambda\vec{e}_\mu}(O)|\lambda\in R\}$ $(\mu=1,2,\cdots,n)$ をこの座標枠の**座標軸**という．ここに，$[\vec{e}_\mu]$ は $\{\vec{e}_\mu\}$ によって張られる（V の）部分線型空間を表す．また，各 $\mathcal{A}_\mu$ を $\vec{e}_\mu$ **軸**という．これらの座標軸はすべて原点 O を通る．

2.1.2 アフィン写像

定義 2.1.4. 2 つのアフィン空間 $\mathcal{M}_1=\{M_1;V_1\},\mathcal{M}_2=\{M_2;V_2\}$ において，2 つの写像 $\phi:M_1\to M_2$，$f:V_1\to V_2$ があって，次の条件 **[AM1]**, **[AM2]** を共に満足するとき，(ϕ,f) は $\mathcal{M}_1$ から $\mathcal{M}_2$ への**アフィン写像**であるという：

[AM1] $f:V_1\to V_2$ は線型写像である．

[AM2] M_1 の任意の点 P，V_1 の任意のベクトル $\vec{a}$ に対して

$$\phi(F_{\vec{a}}(P))=G_{f(\vec{a})}(\phi(P)) \tag{2.12}$$

が成り立つ．ここに，$F_{\vec{a}}$ は V_1 のベクトル $\vec{a}$ に対応する $\mathcal{M}_1$ における平行移動を表す．また，$G_{f(\vec{a})}$ は V_2 のベクトル $f(\vec{a})$ に対応する $\mathcal{M}_2$ における平行移動を表す．

とくに $\mathcal{M}_1=\mathcal{M}_2$ である場合のアフィン写像を**アフィン変換**という．

$Q \overset{\text{def}}{=} P + \vec{a} = F_{\vec{a}}(P)$ とおくと，(2.12) の内容は

$$\phi(Q) = \phi(P) + f(\vec{a}) \tag{2.13}$$

あるいはまた，

$$\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)} = f(\overrightarrow{PQ}) \tag{2.14}$$

と表すこともできる．

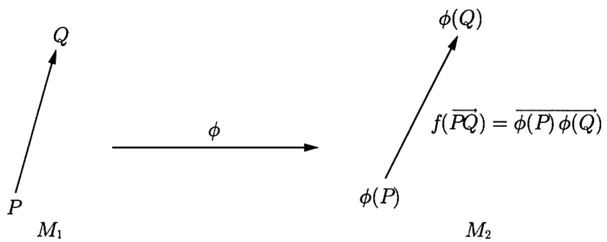


図 **2.3**　アフィン写像

命題 2.1.5. $\mathcal{M}_1 = \{M_1; V_1\}$ から $\mathcal{M}_2 = \{M_2; V_2\}$ へのアフィン写像 (ϕ, f) において，$\phi : M_1 \to M_2$ が全単写であるための必要十分条件は $f : V_1 \to V_2$ が線型同型写像であることである．

アフィン空間 $\mathcal{M}_1 = \{M_1; V_1\}$ からアフィン空間 $\mathcal{M}_2 = \{M_2; V_2\}$ へのアフィン写像 (ϕ, f) において，$f : V_1 \to V_2$ が線型同型写像であるとき，(ϕ, f) は $\mathcal{M}_1$ から $\mathcal{M}_2$ への**アフィン同型写像**であるという．とくに，$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$ である場合のアフィン同型写像を**正則アフィン変換**という．$\mathcal{M}_1$ から $\mathcal{M}_2$ へのアフィン同型写像が存在するとき，$\mathcal{M}_1$ と $\mathcal{M}_2$ とは**アフィン同型**であるといい，$\mathcal{M}_1 \approx \mathcal{M}_2$ と記す．Klein の Erlangen プログラムにならえば，「アフィン空間の幾何学の課題は任意の正則アフィン変換のもとで不変な性質の究明にある」ということになる．

命題 2.1.6. 関係 $\approx$ は同値関係である．

証明：$\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ をいずれも任意のアフィン空間とする．$\mathcal{M} = \{M; V\}$ について，$I : M \to M$, $i : V \to V$ を共に恒等変換とすると，(I, i) は $\mathcal{M}$ から $\mathcal{M}$

へのアフィン同型写像である．$\mathcal{M}_1$ から $\mathcal{M}_2$ へのアフィン同型写像 (ϕ, f) が存在すると，(ϕ^{-1}, f^{-1}) は $\mathcal{M}_2$ から $\mathcal{M}_1$ へのアフィン同型写像である．また，$\mathcal{M}_1$ から $\mathcal{M}_2$ へのアフィン同型写像 (ϕ_1, f_1)，$\mathcal{M}_2$ から $\mathcal{M}_3$ へのアフィン同型写像 (ϕ_2, f_2) が存在するならば，$(\phi_2 \circ \phi_1, f_2 \circ f_1)$ は $\mathcal{M}_1$ から $\mathcal{M}_3$ へのアフィン同型写像である．これらのことは，いずれも容易に示される．したがって，定義 B.9 によって $\simeq$ は同値関係である．

命題 2.1.7. 2 つのアフィン空間 $\mathcal{M}_1 = \{M_1; V_1\}$ と $\mathcal{M}_2 = \{M_2; V_2\}$ とがアフィン同型であるための必要十分条件は $\dim V_1 = \dim V_2$ が成り立つことである．

証明： 必要条件であることは命題 1.1.7 によって明らかである．十分条件であることを示そう．$\dim V_1 = \dim V_2$ であるならば，命題 1.1.7 によって線型同型写像 $f : V_1 \to V_2$ が存在する．M_1 の点 O_1 を 1 つ定めると，M_1 の任意の点 P は $P = O_1 + \vec{x}$, $\vec{x} \in V_1$ と一意的に表される．そこで M_2 の点 O_2 を任意に 1 つ選んで，$\phi(P) \stackrel{\text{def}}{=} O_2 + f(\vec{x})$, $\forall P \in M_1$ によって写像 $\phi : M_1 \to M_2$ を定義すると，(ϕ, f) が $\mathcal{M}_1$ から $\mathcal{M}_2$ へのアフィン同型写像であることは明白である．よって，十分条件であることも示された．

上の命題によれば，アフィン空間 $\mathcal{M} = \{M; V\}$ はアフィン空間 $\{V; V\}$ にアフィン同型である．また，n 次元アフィン空間 $\mathcal{M} = \{M; V\}$ の座標枠 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ をとり

$$\Psi(P) \stackrel{\text{def}}{=} (x^1(P), \cdots, x^n(P)), \quad \forall P = O + x^\mu(P)\vec{e}_\mu \in M \tag{2.15}$$

$$H(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} (u^1, \cdots, u^n), \quad \forall \vec{u} = u^\mu \vec{e}_\mu \in V \tag{2.16}$$

により写像 $\Psi : M \to R^n$ および $H : V \to R^n$ を定義すると，(Ψ, H) は $\mathcal{M}$ からアフィン空間 $\{R^n; R^n\}$ へのアフィン同型写像である．なお，R^n は第 1 章の部分節 **1.1.1** で考えた n 個の実数の組 $(a^1, \cdots, a^n)$ のつくる線型空間を表す．大雑把にいえば，**「n 次元アフィン空間は線型空間 R^n と同一視される」**のである．

命題 1.1.9 の証明および命題 1.1.10 からわかるように，線型写像 $f : V \to W$ は，V, W の基底を決めれば，表現行列によって表すことができる．アフィン写像についても同様なことが成り立つ．

命題 2.1.8. (1) V', V'' が共にある線型空間 W の部分線型空間であり，かつ $V' \cap V'' = \{\vec{0}\}$ であるような2つのアフィン空間 $\mathcal{M}' = \{M'; V'\}, \mathcal{M}'' = \{M''; V''\}$ について，$M \overset{\text{def}}{=} M' \times M'', V \overset{\text{def}}{=} V' \oplus V''$ とおいて，$P = (P', P'')$, $P' \in M', P'' \in M''$, $\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''$, $\vec{u}' \in V', \vec{u}'' \in V''$ に対して

$$P + \vec{u} \overset{\text{def}}{=} (P' + \vec{u}', P'' + \vec{u}'') \tag{2.17}$$

とおくと，$\mathcal{M} \overset{\text{def}}{=} \{M; V\}$ はアフィン空間である．$[O'; \{\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_{n'}\}]$, $[O''; \{\vec{e}''_1, \cdots, \vec{e}''_{n''}\}]$ をそれぞれ $\mathcal{M}'$ および $\mathcal{M}''$ の座標枠とすると，$[(O', O''); \{\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_{n'}, \vec{e}''_1, \cdots, \vec{e}''_{n''}\}]$ は $\mathcal{M}$ の座標枠である．
(2) アフィン空間 $\mathcal{M} = \{M; V\}$ において，$V = V' \oplus V''$ である場合を考える．M の点 P_0 を 1 つ固定して命題 2.1.3 における方法によって部分アフィン空間 $\{M'; V'\}, \{M''; V''\}$ を構成する．このとき，アフィン空間 $\{M' \times M''; V\}$ は $\mathcal{M} = \{M; V\}$ とアフィン同型である．

上の命題の (1) における $\mathcal{M}$ を $\mathcal{M}'$ と $\mathcal{M}''$ の**直積**といい，$\mathcal{M}' \times \mathcal{M}''$ と記す．また，(2) における $\{M' \times M''; V\}$ を $\mathcal{M}$ の $\{M'; V'\}, \{M''; V''\}$ への**直積分解**という．

同様にして，3 個以上のアフィン空間の直積，$\mathcal{M}$ の 3 個以上の部分アフィン空間への直積分解を考えることが出来る．n 次元アフィン空間 $\mathcal{M}$ とその座標枠 $[O; \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n]$ を考えると，$\mathcal{M}$ は $\vec{e}_1$ 軸，$\vec{e}_2$ 軸，…，$\vec{e}_n$ 軸への直積分解とアフィン同型である．

2.2　アフィン空間の向き，計量アフィン空間

2.2.1　向き付けられたアフィン空間，計量アフィン空間

アフィン空間 $\mathcal{M} = \{M; V\}$ において，同伴線型空間 V が向き付けられた線型空間であるとき，$\mathcal{M}$ は**向き付けられたアフィン空間**であるという．向き付けられたアフィン空間においては同伴線型空間の基底は順序付けられていることを考慮して，座標枠を $[O; (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)]$ というように表す．基底 $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ が正（負）の向きに属するとき，$[O; (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)]$ を**正（負）**

の座標枠といい，正（負）の座標枠に関する座標系を**正（負）の座標系**という．

座標枠の正負の定義と定義 1.3.1 により明らかなように，次の命題が成り立つ．

命題 2.2.1. 向き付けられたアフィン空間 $\mathcal{M}_o \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{M; V_o\}$ において，2 つの座標枠 $[O'; (\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n)]$, $[O; (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)]$ が同一の（異なる）向きに属するための必要十分条件は，基底 $(\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n)$, $(\vec{e}_1, , \cdots, \vec{e}_n)$ の関係を (1.86) と表したとき，$\det K > 0$ （$\det K < 0$）であることである．

アフィン空間 $\mathcal{M} = \{M; V\}$ において，同伴線型空間 V が符号数 $(a, n-a)$ の計量線型空間である場合，$\mathcal{M}$ を符号数 $(a, n-a)$ の**計量アフィン空間**といい，$\mathcal{M}^{(a,n-a)} = \{M; V^{(a,n-a)}\}$ と表す．とくに，$\mathcal{M}^n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{M}^{(0,n)}, \mathcal{M}^{(1,n-1)}$ を，それぞれ **Euclid 空間**，**Minkowski 空間**という[2]．

Euclid 空間 $\mathcal{M}^n = \{M; V^n\}$ において，M の任意の 2 点 P, Q について，

$$\overline{PQ} \stackrel{\mathrm{def}}{=} |\overrightarrow{PQ}| \tag{2.18}$$

として，$\overline{PQ}$ のことを 2 点 P, Q の間の**距離**という．命題 1.3.13 の (1), (4), および (2.7) により明らかなように，以下のことが成り立つ：(1) $\overline{PQ} \geq 0$ であり，$\overline{PQ} = 0$ であるのは $P = Q$ のときかつそのときに限る．(2) $\overline{PQ} = \overline{QP}$ である．(3) $\overline{PQ} + \overline{QR} \geq \overline{PR}$ である．

Euclid 空間でないアフィン空間にあっては，Euclid 空間におけるのと同様の意味での距離の概念を定義することはできない．

計量アフィン空間 $\mathcal{M}^{(a,n-a)} = \{M; V^{(a,n-a)}\}$ の座標枠 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ において $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ が $V^{(a,n-a)}$ の正規直交基底であるとき，この座標枠のことを**正規直交座標枠**という．正規直交座標枠に関する座標系を**正規直交座標系**という．アフィン座標枠変換 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}] \to [O'; \{\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n\}]$ において，これらの座標枠が共に正規直交座標枠である場合，この変換を**正規直交座標枠変換**という．とくに，Euclid 空間および Minkowski 空間に

---

[2] Euclid 空間と Euclid 的線型空間とは言葉としては互いに似ているが，前者はアフィン空間についてのものであり後者は線型空間についてのものであって，明確に使い分けられていることに注意しよう．Minkowski 空間と Minkowski 的線型空間についても同様である．

おける正規直交座標枠変換を，それぞれ**Euclid 座標枠変換**，**Poincaré 座標枠変換**，（あるいは**非斉次 Lorentz 座標枠変換**）という．正規直交座標枠の変換にともなう座標系の変換を対応する各ケースに応じて，それぞれ，**正規直交座標変換**，**Euclid 座標変換**，**Poincaré 座標変換**（あるいは**非斉次 Lorentz 座標変換**）という[3]．

命題 1.3.11，2.2.1 により明らかなように，向き付けられた計量アフィン空間 $\mathcal{M}_o^{(a,n-a)} \overset{\text{def}}{=} \{M; V_o^{(a,n-a)}\}$ において，2 つの正規直交座標枠 $[O'; (\vec{E}'_1, \cdots, \vec{E}'_n)]$, $[O; (\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n)]$ が同一の（異なる）向きに属するための必要十分条件は，基底 $(\vec{E}'_1, \cdots, \vec{E}'_n)$, $(\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n)$ の関係を $\vec{E}'_\mu = K^\nu{}_\mu \vec{E}_\nu$ と表したとき，条件 $\det K = \det(K^\nu{}_\mu) = 1$ （$\det K = -1$）が満足されることである．

アフィン同型な 2 つの計量アフィン空間 $\mathcal{M}_1^{(a_1,n_1-a_1)} = \{M_1; V_1^{(a_1,n_1-a_1)}\}$, $\mathcal{M}_2^{(a_2,n_2-a_2)} = \{M_2; V_2^{(a_2,n_2-a_2)}\}$ を考える．$\mathcal{M}_1^{(a_1,n_1-a_1)}$ から $\mathcal{M}_2^{(a_2,n_2-a_2)}$ へのアフィン写像 (ϕ, f) が

$$g_2(f(\vec{u}), f(\vec{u})) = g_1(\vec{u}, \vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in V_1^{(a_1,n_1-a_1)} \tag{2.19}$$

を満足するとき，この写像を $\mathcal{M}_1^{(a_1,n_1-a_1)}$ から $\mathcal{M}_2^{(a_2,n_2-a_2)}$ への**計量同型写像**という．ここに，g_1, g_2 はそれぞれ $\mathcal{M}_1^{(a_1,n_1-a_1)}, \mathcal{M}_2^{(a_2,n_2-a_2)}$ の計量を表す．$\mathcal{M}_1^{(a_1,n_1-a_1)}$ から $\mathcal{M}_2^{(a_2,n_2-a_2)}$ への計量同型写像が存在するとき，$\mathcal{M}_1^{(a_1,n_1-a_1)}$ と $\mathcal{M}_2^{(a_2,n_2-a_2)}$ とは**計量同型**であるという．$\mathcal{M}^{(a,n-a)} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{M}_1^{(a_1,n_1-a_1)} = \mathcal{M}_2^{(a_2,n_2-a_2)}$ である場合の計量同型写像を $\mathcal{M}^{(a,n-a)}$ の**計量同型変換**という．とくに $a = 0$ の場合，$a = 1$ の場合の計量同型変換を，それぞれ $\mathcal{M}^n$ の **Euclid 変換**，$\mathcal{M}^{(1,n)}$ の **Poincaré 変換**（あるいは**非斉次 Lorentz 変換**）という[4]．

(2.14) により明らかなように，アフィン同型な 2 つの計量アフィン空間 $\mathcal{M}_1^{(a_1,n_1-a_1)}, \mathcal{M}_2^{(a_2,n_2-a_2)}$ について，$\mathcal{M}_1^{(a_1,n_1-a_1)}$ から $\mathcal{M}_2^{(a_2,n_2-a_2)}$ へのアフィン写像 (ϕ, f) が計量同型写像であるための必要十分条件は

$$g_2(\overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)}, \overrightarrow{\phi(P)\phi(Q)}) = g_1(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ}), \quad \forall P, Q \in M_1 \tag{2.20}$$

---

[3] $O = O'$ である場合として，**斉次 Lorentz 座標変換**等がある．

[4] $\mathcal{M}^{(a,n-a)}$ のある点 O について $\phi(O) = O$ である場合として，**斉次 Lorentz 変換**等がある．

が成り立つことである．

一言でいえば，**「計量同型写像とは，2 点間の "距離" を保つアフィン写像」**である．

命題 2.2.2. 計量同型写像はアフィン同型写像である．また，計量同型な 2 つの計量アフィン空間 $\mathcal{M}_1^{(a_1,n_1-a_1)}, \mathcal{M}_2^{(a_2,n_2-a_2)}$ について，$a_1 = a_2, n_1 = n_2$ である．

証明: $\mathcal{M}_1^{(a_1,n_1-a_1)}$ と $\mathcal{M}_2^{(a_2,n_2-a_2)}$ はアフィン同型であるから，命題 2.1.7 によって，それらの次元数は等しい．この次元数を $n = n_1 = n_2$ として，$V_1^{(a_1,n-a_1)}$ の正規直交基底 $\{\vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n\}$ を考えると，(2.19) により $g_2(f(\vec{E}_i), f(\vec{E}_j)) = g_1(\vec{E}_i, \vec{E}_j) = \eta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ となる．ゆえに $\{f(\vec{E}_1), \cdots, f(\vec{E}_n)\}$ は $V_2^{(a_2,n-a_2)}$ の正規直交基底である．このことから，f は $V_1^{(a_1,n-a_1)}$ から $V_2^{(a_2,n-a_2)}$ への線型同型写像であり，したがって，(ϕ, f) はアフィン同型写像であることがわかる．命題の後半部分が成り立つことは明らかであろう．

2.2.2 アフィン座標枠変換はアフィン変換ではない

アフィン座標枠変換とアフィン変換とは，互いに全く別の概念であることに注意しよう．アフィン座標枠変換は，アフィン空間における点の位置を記述する手段としての座標枠を命題 2.1.2 における仕方で変更することであって，この変換のもとで点は移動しない．一方，アフィン変換はその定義からわかるように，アフィン空間の点をその空間の点に写す変換である．

アフィン座標枠変換のもとでは，点 P の位置は不動であるが，それを表す位置ベクトル，それらの成分は，(2.9)〜(2.11) に従って変換される．一方アフィン変換 $(\phi, f) : \{M; V\} \to \{M; V\}$ のもとでは，点 P は $\phi(P)$ に写され，一般には $\phi(P) = P$ ではない．同様に，正規直交座標枠変換と計量同型変換は異なり，**Poincaré 座標枠変換（あるいは非斉次 Lorentz 座標枠変換）と Poincaré 変換（あるいは非斉次 Lorentz 変換）とは異なる**．

特殊相対論の多くの本において Poincaré 変換（あるいは非斉次 Lorentz 変換）とよばれているものは，本書の用語法では Poincaré 座標枠変換（あるいは非斉次 Lorentz 座標枠変換）とよばれるべきものである．

2.2.3 Minkowski 空間の基本的性質

この部分節は線型空間の場合の第1章の部分節 **1.3.5** に対応するもので，特殊相対論の舞台になる Minkowski 空間の基礎事項を述べる．特殊相対論においては4次元空間が問題なのであるが，ここでは空間の次元数は $n+1$ としておく．"物理用語" を頻用するが，それらには未だ物理的意味は付与されておらず，単なる記号と理解されるべきことは部分節 **1.3.5** におけるのと同様である．

定義 2.2.1. Minkowski 空間 $\mathcal{M}^{(1,n)} = \{M; V^{(1,n)}\}$ において，$V^{(1,n)}$ が時空的に向き付けられているとき，時間的に向き付けられているとき，それぞれ $\mathcal{M}$ は**時空的に向き付けられている**，**時間的に向き付けられている**という．時空的にも時間的にも向き付けられている Minkowski 空間 $\mathcal{M}^{(1,n)} = \{M; V_o^{(1,n)}\}$ において，さらに $V_o^{(1,n)}$ が定義 1.3.7 の意味で空間的に向き付けられているとき，$\mathcal{M}^{(1,n)}$ は**時空的－時間的－空間的に向き付けられている**という．時空的に向き付けられている Minkowski 空間における座標枠 $[O; (\vec{e}_0, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)]$ は，基底 $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ が定義 1.3.1 の意味で正（負）の基底であるとき，**時空的に正（負）の座標枠**という．時間的に向き付けられている Minkowski 空間における座標枠 $[O; \{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ は，$\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ が**時間的に正（負）の基底**である場合，**時間的に正（負）の座標枠**という．

時空的－時間的－空間的に向き付けられている Minkowski 空間における時空的にも時間的にも正の座標枠 $[O; (\vec{e}_0, \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)]$ は，命題 1.3.38 の直前に述べた仕方で S^n の向きを指定した場合に $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$ がその正の向きに属するとき，**時空的－時間的－空間的に正の座標枠**という．時空的に正（負）の座標枠，時間的に正（負）の座標枠，時空的－時間的－空間的に正の座標枠，それぞれに関する座標系を，**時空的に正（負）の座標系**，**時間的に正（負）の座標系**，**時空的－時間的－空間的に正の座標系**という．

命題 1.3.37 によって明らかなように，次の命題が成り立つ．

命題 2.2.3. Minkowski 空間 $\mathcal{M}^{(1,n)} = \{M; V^{(1,n)}\}$ において，2つの正規直交座標枠 $[O'; \{\vec{E}'_0, \vec{E}'_1, \cdots, \vec{E}'_n\}]$, $[O; \{\vec{E}_0, \vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n\}]$ を考え，基

底 $\{\vec{E}'_0, \vec{E}'_1, \cdots, \vec{E}'_n\}$ と $\{\vec{E}_0, \vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n\}$ の関係を $\vec{E}'_i = K^j{}_i \vec{E}_j$ $(i = 0, 1, \cdots, n)$ として，行列 $K = (K^j{}_i)$ を命題 1.3.34 におけるように表すものとする．これら 2 つの座標枠の関係について以下のことが成り立つ：

（1） $\mathcal{M}$ が時空的に向き付けられている場合，これらの座標枠を $[O'; (\vec{E}'_0, \vec{E}'_1, \cdots, \vec{E}'_n)]$, $[O; (\vec{E}_0, \vec{E}_1, \cdots, \vec{E}_n)]$ と理解することとしたとき，これらが同一の（異なる）時空的向きに属するための必要十分条件は $\epsilon_t \epsilon_s = 1$ （$\epsilon_t \epsilon_s = -1$）であることである．

（2） $\mathcal{M}$ が時間的に向き付けられている場合，これらの座標枠が同一の（異なる）時間的向きに属するための必要十分条件は $\epsilon_t = 1$ （$\epsilon_t = -1$）であることである．

Minkowski 空間 $\{M; V^{(1,n)}\}$ を考える．（1）M の 2 点 P, Q について，$\overrightarrow{PQ}$ が時間的ベクトルである場合，$\overrightarrow{PQ}$ が空間的ベクトルである場合，$\overrightarrow{PQ}$ が光的ベクトルである場合のそれぞれに応じて，P, Q は**時間的関係**，**空間的関係**，**光的関係**にあるという．（2）M の点 P について，$P + \mathcal{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \{P + \vec{u} | \vec{u} \in \mathcal{Y}\}$ で定義される集合 $P + \mathcal{Y}$ のことを P を頂点とする**光円錐**という．集合 $P + \mathcal{Y}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{P + \vec{u} | \vec{u} \in \mathcal{Y}_+\}, P + \mathcal{Y}_- \stackrel{\text{def}}{=} \{P + \vec{u} | \vec{u} \in \mathcal{Y}_-\}$ を，それぞれ P の**未来の光円錐**，P の**過去の光円錐**という．ここに，$\mathcal{Y}, \mathcal{Y}_+, \mathcal{Y}_-$ は定義 1.3.5 におけるものであり，関係式 $P + \mathcal{Y} = (P + \mathcal{Y}_+) \cup (P + \mathcal{Y}_-)$ が成り立つ．

$\{M; V^{(1,n)}\}$ を時間的に向き付けられた Minkowski 空間とする．(A) M の 2 点 P, Q について $\overrightarrow{PQ}$ が正（負）の時間的ベクトルであるとき，P は Q の**時間的過去**（**時間的未来**）であるといい，$P < Q$ （$P > Q$）と表す．また,「$P < Q$ （$P > Q$） または $P = Q$ である」ことを，$P \leqslant Q$ （$P \geqslant Q$）と表す．(B) 点 P について，集合 $P + \mathcal{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{P + \vec{u} | \vec{u} \in \mathcal{Z}_+\}$ を P の時間的未来といい，集合 $P + \mathcal{Z}_- \stackrel{\text{def}}{=} \{P + \vec{u} | \vec{u} \in \mathcal{Z}_-\}$ を P の時間的過去という．また，P の時間的未来（過去）に属する点全体の集合を P の**未来**（**過去**）**の光円錐の内部**という．なお，$\mathcal{Z}_+, \mathcal{Z}_-$ は定義 1.3.4 におけるものである．

命題 2.2.4. 集合 M と関係 $\leqslant$ からなる系 $\{M; \leqslant\}$ は**半順序集合**である[5]．また，系 $\{M; \geqslant\}$ は半順序集合である．

5） 半順序集合については付録 **B** の定義 B.10 を参照.

証明：(1) M の任意の点 P について，$P \leqslant P$ である．(2) M の2点 P, Q について，$P \leqslant Q$ でありかつ $Q \leqslant P$ であるものとする．$P \leqslant Q$ であることにより，$\overrightarrow{PQ}$ は正の時間的ベクトルであるか零ベクトルであるかのどちらかである．一方 $Q \leqslant P$ であることにより，$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$ は負の時間的ベクトルであるか零ベクトルであるかのどちらかである．これらすべての条件を満足する $\overrightarrow{PQ}$ は零ベクトルに限る．したがって，$P = Q$ である．(3) M の3点 P, Q, R について，$P \leqslant Q, Q \leqslant R$ とする．$P = Q$ あるいは $Q = R$ の場合は明らかに $P \leqslant R$ である．$P < Q$ かつ $Q < R$ である場合は $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}$ はいずれも正の時間的ベクトルであるから，命題1.3.33によりそれらの和 $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ は正の時間的ベクトルである．ここで(2.7)を用いた．したがって，この場合 $P < R$ である．結局 $P \leqslant Q, Q \leqslant R$ ならば $P \leqslant R$ であることがわかる．以上のことおよび半順序集合の定義により，命題の前半部分が成り立つことがわかる．命題の後半部分も同様に証明される．

$\mathcal{M}^{(1,n)} = \{M; V^{(1,n)}\}$ を時間的に向き付けられたMinkowski空間とする．(A) M の2点 P, Q について $\overrightarrow{PQ}$ が $\mathcal{Z}_+ \cup \mathcal{Y}_+$ （$\mathcal{Z}_- \cup \mathcal{Y}_-$）のベクトルであるとき P は Q の**因果的過去**（**因果的未来**）であるといい，$P \prec Q$ （$P \succ Q$）と表す．また，$P \prec Q$ （$P \succ Q$）であるか $P = Q$ であることを，$P \preceq Q$ （$P \succeq Q$）と表す．(B) 点 P について，$P + \mathcal{Z}_+ \cup \mathcal{Y}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{P + \vec{u} | \vec{u} \in \mathcal{Z}_+ \cup \mathcal{Y}_+\}$ で定義される集合 $P + \mathcal{Z}_+ \cup \mathcal{Y}_+$ を P の因果的未来という．また，集合 $P + \mathcal{Z}_- \cup \mathcal{Y}_- \stackrel{\text{def}}{=} \{P + \vec{u} | \vec{u} \in \mathcal{Z}_- \cup \mathcal{Y}_-\}$ を P の因果的過去という．

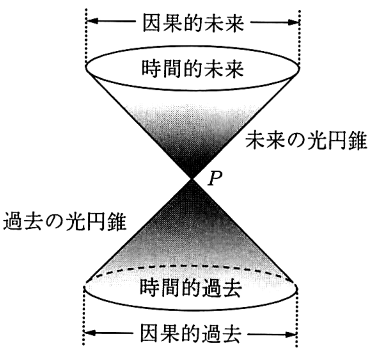


図 2.4　未来の光円錐，時間的未来，因果的未来等

前命題の場合と同様にして証明されるように，系 $\{M;\preceq\}$, $\{M;\succeq\}$ は共に半順序集合である．なお，$P<Q$ ならば $P\prec Q$（$P\leqslant Q$ ならば $P\preceq Q$），$P>Q$ ならば $P\succ Q$（$P\geqslant Q$ ならば $P\succeq Q$）である．また，$\{M;\leqslant\}$, $\{M;\geqslant\}$, $\{M;\preceq\}$, $\{M;\succeq\}$ はいずれも**全順序集合**ではない．なぜなら，空間的関係にある 2 点 P,Q については，関係 $P\preceq Q$, $Q\preceq P$, $P\succeq Q$, $Q\succeq P$ はいずれも成り立たないからである[6)]．$\{M;\leqslant\}$, $\{M;\geqslant\}$ が全順序集合でないここことは，第 4 章で述べる**同時刻の相対性**と直結している．

定義 2.2.2. 時間的に向き付けられた Minkowski 空間 $\mathcal{M}^{(1,n)}=\{M;V^{(1,n)}\}$ において，M の点 O と正の時間的単位ベクトル $\vec{E}_0$ の組 $[O;\vec{E}_0]$ のことを**慣性系**という．

時間的に向き付けられた Minkowski 空間 $\mathcal{M}^{(1,n)}=\{M;V^{(1,n)}\}$ において慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ を 1 つ定めると，$V^{(1,n)}$ の Minkowski 分解 $V^{(1,n)}=[\vec{E}_0]\oplus S^n(\vec{E}_0)$ に対応して $\mathcal{M}$ の直積分解を考えることができる．命題 2.1.8 の (2) によれば，$M_{\vec{E}_0}\overset{\text{def}}{=}\{O+\vec{t}|\vec{t}\in[\vec{E}_0]\}$, $M_{S^n(\vec{E}_0)}\overset{\text{def}}{=}\{O+\mathbf{x}|\mathbf{x}\in S^n(\vec{E}_0)\}$ とおくと，$\{M_{\vec{E}_0};[\vec{E}_0]\}$ と $\{M_{S^n(\vec{E}_0)};S^n(\vec{E}_0)\}$ は共に Minkowski 空間 $\mathcal{M}^{(1,n)}$ の部分アフィン空間であって，$\{M_{\vec{E}_0}\times M_{S^n(\vec{E}_0)};V^{(1,n)}\}$ は $\mathcal{M}^{(1,n)}$ とアフィン同型である．

命題 2.2.5. $\{M_{\vec{E}_0}\times M_{S^n(\vec{E}_0)};V^{(1,n)}\}$ は $\mathcal{M}^{(1,n)}$ と計量同型である．

証明：$M_{\vec{E}_0}\times M_{S^n(\vec{E}_0)}$ の任意の点 (P_0,P_S) は，$(P_0,P_S)=(O+\vec{t},O+\mathbf{x})$, $\vec{t}\in[\vec{E}_0],\mathbf{x}\in S^n(\vec{E}_0)$ と一意的に表される．$\varPhi((P_o,P_S))\overset{\text{def}}{=}O+\vec{t}+\mathbf{x}$, $\forall(P_o,P_S)=(O+\vec{t},O+\mathbf{x})\in M_{\vec{E}_o}\times M_{S^n(\vec{E}_o)}$ によって，写像 $\varPhi:M_{\vec{E}_o}\times M_{S^n(\vec{E}_o)}\to M$ を定義する．i を $V^{(1,n)}$ における恒等変換とすると，$(\varPhi,i)$ が $\{M_{\vec{E}_0}\times M_{S^n(\vec{E}_0)};V^{(1,n)}\}$ から $\mathcal{M}^{(1,n)}$ への計量同型写像であることは明らかである．よって命題は成り立つ．

命題 1.3.28 からわかるように，$[\vec{E}_0]$, $S^n(\vec{E}_0)$ はそれぞれ 1 次元および n 次元 Euclid 的線型空間である．したがって，$\{M_{\vec{E}_0};[\vec{E}_0]\}$, $\{M_{S^n(\vec{E}_0)};S^n(\vec{E}_0)\}$ は，それぞれ 1 次元および n 次元 Euclid 空間である．そこで，これらの空間をそれぞれ $\mathcal{M}^1_{\vec{E}_0}=\{M_{\vec{E}_0};[\vec{E}_0]\}$, $\mathcal{M}^n_{S^n(\vec{E}_0)}=\{M_{S^n(\vec{E}_0)};S^n(\vec{E}_0)\}$ と表す

6) 付録 **B** の定義 B.10 を参照．

ことにする．$\{M_{\vec{E}_0} \times M_{S^n(\vec{E}_0)}; V^{(1,n)}\}$ のことを $\mathcal{M}^{(1,n)}$ の慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ による **Minkowski 分解**といい，また $\mathcal{M}^1_{\vec{E}_0}$ のことを**慣性系** $[O;\vec{E}_0]$ **における時間**という．$\mathcal{M}^{(1,n)} = \{M; V^{(1,n)}\}$ において，M の点 P を $P = O + \overrightarrow{OP}$ と表して，位置ベクトル $\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{OP}$ を $\vec{x} = X^0\vec{E}_0 + \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in S^n(\vec{E}_0)$ と表したとき，$t \overset{\text{def}}{=} X^0/c, P_S \overset{\text{def}}{=} O + \mathbf{x} \in M_{S^n(\vec{E}_0)}$ を，それぞれ P の**慣性系** $[O;\vec{E}_0]$ **における時刻および空間的位置**という．ただし c は定数とする[7]．

$S^n(\vec{E}_0)$ は n 次元 Euclid 的線型空間であるから，命題 2.1.3 によれば，実数 X^0 を 1 つ定めて $M(X^0) \overset{\text{def}}{=} \{O + X^0\vec{E}_0 + \mathbf{x} | \mathbf{x} \in S^n(\vec{E}_0)\}$ とおいて，n 次元 Euclid 空間 $\{M(X^0); S^n(\vec{E}_0)\}$ を構成することができる．

O を**慣性系** $[O;\vec{E}_0]$ **の原点**，$\{M(X^0); S^n(\vec{E}_0)\}$ を**慣性系** $[O;\vec{E}_0]$ **の時刻** $t = X^0/c$ **における空間**という．$O(X^0) \overset{\text{def}}{=} O + X^0\vec{E}_0$ を**空間** $M(X^0)$ **の原点**という．$M_{S^n(\vec{E}_0)} = M(0)$ である．また $M = \bigcup_{X^0 \in R} M(X^0)$ であり，$X^0 \neq Y^0$ であるならば $M(X^0) \cap M(Y^0) = \emptyset$ である．ここに，$\emptyset$ は**空集合**を表す．$M_{S^n(\vec{E}_0)}$ は慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ における時刻 $t = X^0/c = 0$ における空間であり，Minkowski 空間（の基礎集合）M は慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ における各時刻での空間全体の**直和**である[8]．直観的には，式 $M = \bigcup_{X^0 \in R} M(X^0)$ は M の各時刻での空間への“薄切り”を表している．

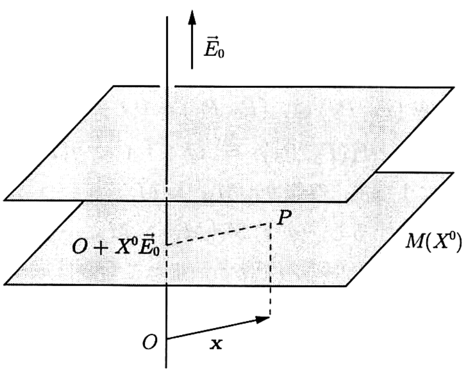


図 2.5 Minkowski 空間の“薄切り”

[7] 第 4 章および 5 章において，$n = 3$ であってかつ t, c がそれぞれ物理的時刻，真空中での光の速さを表す場合を扱うが，現段階では物理的意味は付与されていない．

[8] 付録 **B** の定義 B.5 を参照．

2.3　曲面，可微分写像

$[O;\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}]$ を n 次元アフィン空間 $\{M;V\}$ の任意の座標枠，Ψ を (2.15) で定義される写像 $\Psi : M \to R^n$ とする．また，R^n は付録 **B** の定義 B.13 に続く「**Hausdorff 空間**の例」の部分における意味での Hausdorff 空間 $\mathcal{R}^n = \{R^n;\mathfrak{U}\}$ を構成しているものとする．そこで，正数 δ に対して $U(a;\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in R^n | \, \|x-a\| < \delta\}$ とおいて[9]，さらに $V(P;\delta) \stackrel{\text{def}}{=} U(\Psi(P);\delta)$, $\{V(P)\} \stackrel{\text{def}}{=} \{V(P;\delta)|\delta \in R_+\}$, $\mathfrak{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{V(P)\}|P \in M\}$ とおくと，$\{M;\mathfrak{V}\}$ は Hausdorff 空間である．また，上の**位相**の入れ方は，座標枠のとり方によらない．すなわち，任意の座標枠 $[O';\{\vec{e}'_1,\cdots,\vec{e}'_n\}]$ をとって，$[O;\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}]$ をとった場合におけるのと同様の仕方で位相空間 $\{M;\mathfrak{V}'\}$ をつくると，**近傍系** $\mathfrak{V}$ によって与えられる位相と $\mathfrak{V}'$ によって与えられる**位相は同値**[10] である．また，R^n が**可算基**をもつことにより，M は可算基をもつことがわかる．

以下においては，アフィン空間 $\{M;V\}$ の基礎集合 M は，上の仕方で位相が入れられている位相空間として扱い，M のことを**基礎空間**とよぶ．

本節では，アフィン空間における曲面片と幾つかの曲面片を“張り合わせて”できる曲面について考える．

d を n 以下の自然数，r を非負の整数とする．d 次元実数ベクトル空間 R^{d} のある**領域**（= **連結**な**開集合**）D^{d} から n 次元アフィン空間 $\{M;V\}$ の基礎空間 M への写像 $\phi : D^{\mathrm{d}} \to M$ が D^{d} において $\boldsymbol{C^r}$ **級**（$\boldsymbol{C^\infty}$ **級**）であるとは，$\{M;V\}$ のある座標枠 $[O;\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}]$ を用いて

$$\left.\begin{aligned} \phi(u^1,\cdots,u^{\mathrm{d}}) = O + Z^\mu(u^1,\cdots,u^{\mathrm{d}})\vec{e}_\mu \\ \forall(u^1,\cdots,u^{\mathrm{d}}) \in D^{\mathrm{d}} \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

と表したとき，関数 $Z^\mu : D^{\mathrm{d}} \to R$ $(\mu = 1,2,\cdots,n)$ がすべて C^r 級（C^∞ 級）であることをいう[11]．以下，C^r 級というときの r は非負の整数または ∞ を表すものとする．

9）$\|\ \|$ を Euclid 的線型空間におけるノルム $|\ |$ と混同しないように．なお，R^n を**位相空間**として扱う場面では，その元を表すのに，ベクトルを表す矢印を省いて x というように書くことにする．

10）付録 **B** の定義 B.14 を参照．

11）付録 **B** の定義 B.20 を参照．

命題 2.3.1. 写像 ϕ が C^r 級であることの上の定義は座標枠のとり方に依存しない．すなわち，ϕ をある座標枠 $[O;\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}]$ を用いて (2.21) のように表したときの関数 $Z^\mu : D^{\mathrm{d}} \to R$ $(\mu = 1,2,\cdots,n)$ がすべて C^r 級であるならば，任意の座標枠 $[O';\{\vec{e}'_1,\cdots,\vec{e}'_n\}]$ を用いて

$$\left.\begin{array}{r}\phi(u^1,\cdots,u^{\mathrm{d}}) = O' + Z'^\mu(u^1,\cdots,u^{\mathrm{d}})\vec{e}'_\mu \\ \forall(u^1,\cdots,u^{\mathrm{d}}) \in D^{\mathrm{d}}\end{array}\right\} \qquad (2.22)$$

と表したときの n 個の関数 $Z'^\mu : D^{\mathrm{d}} \to R$ もすべて C^r 級である．

証明: 2つの座標枠 $[O;\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}]$, $[O';\{\vec{e}'_1,\cdots,\vec{e}'_n\}]$ を用いたときの点 $P \overset{\mathrm{def}}{=} \phi(u^1,\cdots,u^{\mathrm{d}})$ の位置ベクトルを (2.9) のように表して $K^\nu{}_\mu, a^\nu$ を (2.11) におけるものとすると，(2.10) に対応して

$$Z'^\mu(u^1,\cdots,u^{\mathrm{d}}) = K^\mu{}_\nu Z^\nu(u^1,\cdots,u^{\mathrm{d}}) + a^\mu \qquad (\mu = 1,2,\cdots,n) \qquad (2.23)$$

が成り立つ．よって，命題が成り立つことは明らかである．

定義 2.3.1. $\mathrm{d},\phi,D^{\mathrm{d}}$ を (2.21) におけるものとし，また r を自然数とする．写像 ϕ が C^r 級であって，$\{M;V\}$ のある座標枠 $[O;\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}]$ を用いて ϕ を (2.21) のように表したときの **Jacobi の行列**

$$(J^\mu{}_\nu) \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial Z^\mu}{\partial u^\nu}\right) \qquad (\mu = 1,2,\cdots,n,\ \nu = 1,2,\cdots,\mathrm{d}) \qquad (2.24)$$

が D^{d} 上至るところで階数が d であるとき，すなわち，$(J^\mu{}_\nu)$ から $n-\mathrm{d}$ 個の行を除くことによってできる ${}_n\mathrm{C}_{\mathrm{d}}$ 個の d 次正方行列のうちに，その行列式が D^{d} のどの点においても 0 でないようなものが存在するとき，$S \overset{\mathrm{def}}{=} \phi(D^{\mathrm{d}})$ を C^r 級 d 次元**曲面片**という．

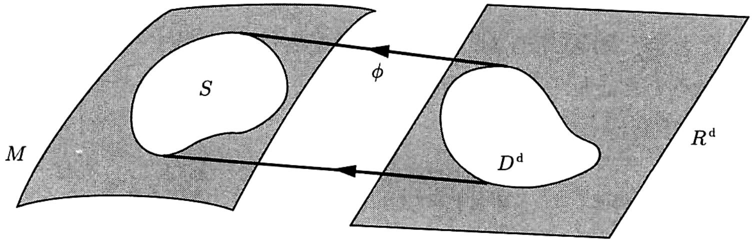


図 2.6　曲面片

命題 2.3.2. S が C^r 級の d 次元曲面片であることの上の定義は座標枠のとり方によらない．

証明： S が C^r 級であることの定義が座標枠のとり方によらないことは前命題による．ϕ を座標枠 $[O;\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}]$ を用いて (2.21) のように表したときの Jacobi の行列 $(J^\mu{}_\nu)$ の階数が D^{d} の至る所で d であるものとする．任意の座標枠 $[O';\{\vec{e}'_1,\cdots,\vec{e}'_n\}]$ を用いて ϕ を (2.22) のように表したときの Jacobi の行列

$$(J'^\mu{}_\nu) \overset{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial Z'^\mu}{\partial u^\nu}\right) \qquad (\mu=1,2,\cdots,n,\ \nu=1,2,\cdots,\mathrm{d}) \tag{2.25}$$

を考えよう．命題 2.1.2 によれば，関数 Z'^μ と関数 Z^μ $(\mu = 1,2,\cdots,n)$ とは (2.10) において，x'^μ, x^ν をそれぞれ Z'^μ, Z^ν で置き換えて得られる関係にある．したがって，$J'^\mu{}_\nu = \sum_{\lambda=1}^n K^\mu{}_\lambda J^\lambda{}_\nu$ $(\mu=1,2,\cdots,n,\ \nu=1,2,\cdots,\mathrm{d})$ である．行列 $K=(K^\nu{}_\mu)$ は正則行列であるから，明らかに $(J'^\mu{}_\nu)$ の階数も D^{d} の至る所で d である．よって命題は成り立つ．

1 次元曲面片，$n-1$ 次元曲面片を，それぞれ**曲線片**，**超曲面片**という．

なお，以下にみるように，M それ自身も曲面片と見なされる．座標枠 $[O;\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}]$ を定めて，写像 $\Phi: R^n \to M$ を

$$\Phi(u^1,\cdots,u^n) \overset{\mathrm{def}}{=} O + u^\mu \vec{e}_\mu, \quad \forall(u^1,\cdots,u^n) \in R^n \tag{2.26}$$

で定義する．すなわち，(2.21) において，$\mathrm{d}=n, D^{\mathrm{d}}=R^n$ かつ $Z^\mu(u^1,\cdots, u^n) \overset{\mathrm{def}}{=} u^\mu$, $\forall(u^1,\cdots,u^n)\in R^n$ $(\mu=1,2,\cdots,n)$ である場合の ϕ を Φ とおく．Φ は C^∞ 級であって $M=\Phi(R^n)$ である．このとき (2.24) に相当する Jacobi の行列 $(\partial u^\mu/\partial u^\nu)=(\delta^\mu{}_\nu)$ の階数は n である．ゆえに，M それ自身が C^∞ 級 n 次元曲面片である．写像 Φ を座標枠 $[O';\{\vec{e}'_1,,\cdots,\vec{e}'_n\}]$ を使って，$\Phi(u^1,\cdots,u^n)=O'+u'^\mu(u^1,\cdots,u^n)\vec{e}'_\mu$ と表すと，(2.23) に対応して $u'^\mu = K^\mu{}_\nu u^\nu + a^\mu$ $(\mu=1,2,\cdots,n)$ となる．

定義 2.3.2. M の**部分位相空間** Σ が以下の条件 [**S1**]，[**S2**] を共に満足するとき，Σ を（M における）C^r 級 d 次元**曲面**という．

条件： [**S1**] 幾つかの C^r 級 d 次元曲面片 S_α, $\alpha\in A$ の**和集合**である．すなわち，$\Sigma=\bigcup_{\alpha\in A}S_\alpha$ である．ここに，A は添数集合を表す．[**S2**] 各曲面片 S_α は Σ の開集合である．

1次元曲面，$n-1$ 次元曲面をそれぞれ**曲線**，**超曲面**という．

直観的には，曲面は曲面片を滑らかに張り合わせたものである．曲面片は曲面であり，アフィン空間 M はそれ自身 C^∞ 級曲面である[12]．$n+1$ 次元 Euclid 空間の中の n 次元球面は C^∞ 級曲面であるが曲面片ではない．また，d 次元曲面 Σ の開集合 O に Σ の部分位相空間としての位相を入れたものは d 次元曲面である．このとき O は Σ の**開部分曲面**であるという．

本節の冒頭に述べたこと，付録 **B** の命題 B.5 および B.8 からわかるように，d 次元曲面 Σ は Hausdorff 空間であり，かつ可算基をもつ．また，明らかに $\mathrm{d} \leq n$ である．

命題 2.3.3. d 次元曲面片において，定義 2.3.1 における写像 $\phi : D^{\mathrm{d}} \to M$ を考える．D^{d} の任意の点 Q において，その**近傍** $U(Q)$ が存在して，ϕ を $U(Q)$ に制限した写像 $\phi|_{U(Q)} : U(Q) \to \phi(U(Q)) \subset M$ は全単写でかつ C^r 級であり，逆写像 $(\phi|_{U(Q)})^{-1} : \phi(U(Q)) \to U(Q)$ も C^r 級である．

証明： 定義 2.3.1，および，$\mathrm{d}=n$ の場合については命題 B.11，B.12 により，$\mathrm{d}<n$ の場合については命題 B.13 によって，本命題が成り立つことは明らかである．

d 次元曲面 Σ の曲面片 S について写像 ϕ の逆写像 $\psi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \phi^{-1}$ を考え，これを S の**座標写像**といい，組 (S, ψ) を Σ の**座標近傍**という．Σ の点 P に対して，$\psi(P)$ は $D^{\mathrm{d}} \subset R^{\mathrm{d}}$ の元であるから，$\psi(P)$ は d 個の実数 $x^\mu(P)$ $(\mu=1,2,\cdots,\mathrm{d})$ を用いて $\psi(P)=(x^1(P),\cdots,x^{\mathrm{d}}(P))$ と表される．ψ は1対1写像であるから，S の2点 P,Q について $(x^1(P),\cdots,x^{\mathrm{d}}(P)) = (x^1(Q),\cdots,x^{\mathrm{d}}(Q))$ であるのは $P=Q$ であるときかつそのときに限る．また，ψ は C^r 級写像であるから，x^μ は S 上で定義された C^r 級実数値関数である．$(x^1,\cdots,x^{\mathrm{d}})$ と $(x^1(P),\cdots,x^{\mathrm{d}}(P))$ のことを，それぞれ (S,ψ)（あるいは，単に S）における**局所座標系**，P の**局所座標**という．

アフィン空間 M は C^∞ 級曲面であるが，Φ を (2.26) で定義されるものとして $\Psi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Phi^{-1}$ とおくと[13]，(M,Ψ) は座標近傍である．$(x^1(P),\cdots,x^n(P)) \stackrel{\mathrm{def}}{=}$

[12] 混乱が起こらないと思われる場面では，しばしばアフィン空間 $\mathcal{M}=\{M;V\}$ 自体とその基礎空間 M とを区別しないで扱う．

[13] この Ψ は (2.15) におけるものと一致する．

$\Psi(P), \forall P \in M$ とすると $(x^1, \cdots, x^n)$ は (M, Ψ) における局所座標系であり，これは定義 2.1.2 において述べた座標枠 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ に関する座標系そのものである[14)].

「$\phi|_{U(Q)} : U(Q) \to \phi(U(Q))$ が全単写でかつ C^r 級であり，かつその逆写像も C^r 級である」という性質をもつことを,「$\phi|_{U(Q)}$ は**C^r 級微分同型写像**である」と表現し，また，$U(Q)$ と $\phi(U(Q))$ とは**C^r 級微分同型**であるという[15)].

命題 2.3.3 によって，任意の d 次元曲面は d 次元実数ベクトル空間 R^{d} のある領域と C^r 級微分同型であるような曲面片の和集合として表されることがわかる．以下では，単に曲面片といえば C^∞ 級曲面片であるものを指すこととし，また曲面とは C^∞ 級曲面のこととする.

前命題から明らかなように, d 次元曲面 $\Sigma = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$ について $S_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset$ であるならば, 写像 $\psi_{\beta\alpha} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \psi_\beta \circ (\psi_\alpha)^{-1} : \psi_\alpha(S_\alpha \cap S_\beta) \to \psi_\beta(S_\alpha \cap S_\beta)$ は全単写であり，この写像とその逆写像 $\psi_{\alpha\beta}$ は共に C^∞ 級である.

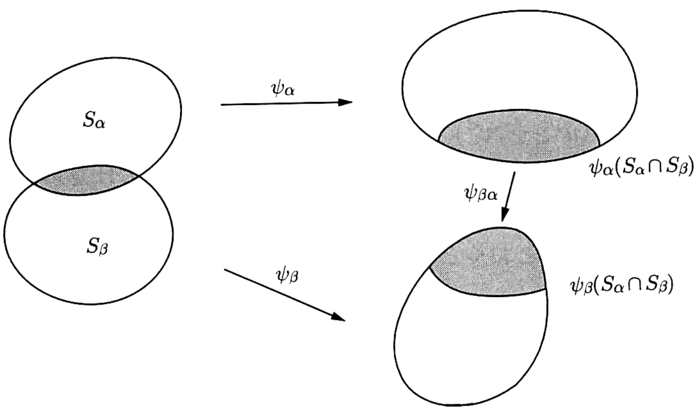


図 **2.7**　写像 ψ_α，ψ_β，$\psi_{\beta\alpha}$

---

14)　曲面 Σ について，$(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ のことを局所座標系というように，局所という言葉をつけたのは，それが Σ の**部分集合** S **の上で定義されている**ことを示すためである．アフィン空間の場合の局所座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ は，これ 1 つで M 全体を記述できるので，この場合については単に**座標系** $(x^1, \cdots, x^n)$ とよぶことにする．この語法は定義 2.1.2 とも調和する.

15)　付録 **B** の定義 B.21 を参照.

写像 $\psi_{\beta\alpha}: \psi_\alpha(S_\alpha \cap S_\beta) \to \psi_\beta(S_\alpha \cap S_\beta)$ が上述の性質をもつことを，「$\psi_{\beta\alpha}$ は $\psi_\alpha(S_\alpha \cap S_\beta)$ から $\psi_\beta(S_\alpha \cap S_\beta)$ の上への C^∞ 級微分同型写像である」と表現する．

曲面 $\Sigma = \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ において S_α の座標写像を ψ_α と記し，座標近傍全体の集まり $\{(S_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を**座標近傍系**という．また，$\psi_{\beta\alpha}: \psi_\alpha(S_\alpha \cap S_\beta) \to \psi_\beta(S_\alpha \cap S_\beta)$ を (S_α, ψ_α) から (S_β, ψ_β) への**座標変換**という．

$S_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset$ であるような曲面片 S_α, S_β を考える．$S_\alpha \cap S_\beta$ の点 $O + Z^\mu \vec{e}_\mu$ について，$({u_\alpha}^1, \cdots, {u_\alpha}^{\mathrm{d}}) \overset{\mathrm{def}}{=} \psi_\alpha(O + Z^\mu \vec{e}_\mu)$, $({u_\beta}^1, \cdots, {u_\beta}^{\mathrm{d}}) \overset{\mathrm{def}}{=} \psi_\beta(O + Z^\mu \vec{e}_\mu)$ とおくと，Z^μ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$ は，$\psi_\alpha(S_\alpha \cap S_\beta)$ 上では ${u_\alpha}^\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d})$ の可微分関数，$\psi_\beta(S_\alpha \cap S_\beta)$ 上では ${u_\beta}^\lambda$ $(\lambda = 1, 2, \cdots, \mathrm{d})$ の可微分関数である．${J_\alpha}^\mu{}_\nu \overset{\mathrm{def}}{=} \partial Z^\mu / \partial {u_\alpha}^\nu$, ${J_\beta}^\mu{}_\lambda \overset{\mathrm{def}}{=} \partial Z^\mu / \partial {u_\beta}^\lambda$, ${K_{\beta\alpha}}^\lambda{}_\nu \overset{\mathrm{def}}{=} \partial {u_\beta}^\lambda / \partial {u_\alpha}^\nu$ とおくと ${J_\alpha}^\mu{}_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\mathrm{d}} {J_\beta}^\mu{}_\lambda {K_{\beta\alpha}}^\lambda{}_\nu$ であり，行列 $({J_\alpha}^\mu{}_\nu), ({J_\beta}^\mu{}_\lambda)$ の階数は共に d であるから，d 次正方行列 $K_{\beta\alpha} \overset{\mathrm{def}}{=} ({K_{\beta\alpha}}^\lambda{}_\nu)$ の階数も d である[16]．したがって，この行列は正則である．行列 $K_{\beta\alpha}$ のことを**座標変換の行列**という．また，$S_\alpha \cap S_\beta$ においては，2 つの局所座標系 $({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^{\mathrm{d}})$, $({x_\beta}^1, \cdots, {x_\beta}^{\mathrm{d}})$ が存在する．$\psi_\alpha(S_\alpha \cap S_\beta)$ の点を u で表すと

$$\psi_{\beta\alpha}(u) = \psi_\beta({\psi_\alpha}^{-1}(u)) \tag{2.27}$$

であるが，$u = (u^1, \cdots, u^{\mathrm{d}})$, $\psi_{\beta\alpha}(u) = ({\psi_{\beta\alpha}}^1(u), \cdots, {\psi_{\beta\alpha}}^{\mathrm{d}}(u))$ と表すと，${\psi_{\beta\alpha}}^\mu$ $(\mu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d})$ は C^∞ 級関数となる．$S_\alpha \cap S_\beta$ の任意の点 P について $\psi_\alpha(P) = ({x_\alpha}^1(P), \cdots, {x_\alpha}^{\mathrm{d}}(P))$, $\psi_\beta(P) = ({x_\beta}^1(P), \cdots, {x_\beta}^{\mathrm{d}}(P))$ であるから，$u = \psi_\alpha(P)$ とおくと (2.27) の内容は

$${x_\beta}^\mu(P) = {\psi_{\beta\alpha}}^\mu({x_\alpha}^1(P), \cdots, {x_\alpha}^{\mathrm{d}}(P)), \qquad P \in S_\alpha \cap S_\beta \tag{2.28}$$

と表される．これを

$${x_\beta}^\mu = {\psi_{\beta\alpha}}^\mu({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^{\mathrm{d}}), \qquad S_\alpha \cap S_\beta \text{の上で} \tag{2.29}$$

と表すこともある．

曲面片 S が与えられても，座標近傍系や座標写像は一意的ではない．すなわち，R^{d} の領域 ${D_1}^{\mathrm{d}}, {D_2}^{\mathrm{d}}$ に対して，$\psi_1(S) = {D_1}^{\mathrm{d}} \neq {D_2}^{\mathrm{d}} = \psi_2(S)$ であ

[16] 行列 A の階数を $\mathrm{rank}(A)$ と表すと，行列 A と B の積 AB の階数 $\mathrm{rank}(AB)$ について，$\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{Min}\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$ が成り立つことによる．

るような座標写像 ψ_1, ψ_2 が存在する．また，Σ が与えられても，それの曲面片への分解は一意的というわけではないことに注意しよう．すなわち,「曲面片の**集合の族** $\{S_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{S'_\gamma\}_{\gamma\in C}$ に対して, $\Sigma = \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha = \bigcup_{\gamma\in C} S'_\gamma$ であることは，$\{S_\alpha\}_{\alpha\in A} = \{S'_\gamma\}_{\gamma\in C}$ を意味しない．

d 次元曲面 Σ の開集合 U から R への**連続写像**，すなわち U 上の実数値連続関数 f が次の条件を満足するとき，f は点 P において $\boldsymbol{C^r}$ **級**であるという．

条件 : $V \subset S_\alpha \cap U$ を満足する点 P の近傍 V と添数 α が存在するが，$\psi_\alpha(V)$ 上の関数 $f \circ (\psi_\alpha)^{-1}$ は $\psi_\alpha(P)$ の近傍で C^r 級である．

f が U の各点で C^r 級であるとき，f は U で $\boldsymbol{C^r}$ **級**であるという．容易に示されるように，この定義は V, S_α の選び方によらない．

Σ の点 P の近傍で定義された C^r $(r \geq 1)$ 級関数 f に対応して，$P \in S_\alpha$ である座標近傍 (S_α, ψ_α) を選んで $F_\alpha \overset{\text{def}}{=} f \circ (\psi_\alpha)^{-1}$ とすると，これは $\psi_\alpha(S_\alpha) \subset R^{\mathrm{d}}$ 上の C^r 級関数である．そこで，

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha{}^\mu}\right)_P \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial u_\alpha{}^\mu}\right)_{\psi_\alpha(P)} \tag{2.30}$$

により f の点 P における $x_\alpha{}^\mu$ による**微分係数**を定義する．さらに，

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha{}^\mu}(P) \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\alpha{}^\mu}\right)_P, \quad \forall P \in S_\alpha \tag{2.31}$$

により関数 $\partial f/\partial x_\alpha{}^\mu$ を定義する．ただし，$D_\alpha{}^{\mathrm{d}} = \psi_\alpha(S_\alpha)$ の元を実数 $u_\alpha{}^\mu$ $(\mu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d})$ の組 $(u_\alpha{}^1, \cdots, u_\alpha{}^{\mathrm{d}})$ で表している．$S_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset$ の場合，容易に示されるように，$S_\alpha \cap S_\beta$ 上で次の関係が成り立つ[17)]：

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha{}^\mu} = \frac{\partial x_\beta{}^\nu}{\partial x_\alpha{}^\mu}\frac{\partial f}{\partial x_\beta{}^\nu} \tag{2.32}$$

アフィン空間 M における d 次元曲面 $\Sigma = \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ の開集合 U からアフィン空間 M' における d' 次元曲面 $\Sigma' = \bigcup_{\alpha'\in A'} S'_{\alpha'}$ への連続写像 φ が次の条件を満足するとき，φ は点 P において $\boldsymbol{C^r}$ **級**であるという[18)]．

17) この式の右辺においては，添数 ν のとり得る値の範囲 $\nu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}$ のすべてについての和をとるものとする．以下同様に，Einstein の規約に従って和を表す記号 $\sum$ を原則として省略する．

18) この φ を (2.21) などにおける写像 $\phi : D^{\mathrm{d}} \to M$ と混同しないように．

条件：点 P の近傍 V と添数 α, α' を適当に選ぶことにより，$V \in S_\alpha \cap U$, $\varphi(P) \in S'_{\alpha'}$ とすることができるが，$\psi_\alpha(V)$ から $R^{\mathrm{d}'}$ への写像 $\psi'_{\alpha'} \circ \varphi \circ (\psi_\alpha)^{-1}$ が $\psi_\alpha(P)$ の近傍で C^r 級である．

φ が U の各点で C^r 級であるとき，φ は U において **C^r 級**であるという．ここに，$\psi_\alpha, \psi_{\alpha'}$ は，それぞれ $S_\alpha, S_{\alpha'}$ の座標写像を表す．この定義は $V, S_\alpha, S'_{\alpha'}$ の選び方によらない．また，写像 $\varphi: \Sigma \to \Sigma'$ が C^r 級ならば，φ は Σ から M' への写像としても C^r 級である．

曲面 Σ の開集合 U から曲面 Σ' の開集合 U' の上への 1 対 1 写像 φ があり，φ もその逆写像 φ^{-1} も C^r 級であるとき，φ は U から U' の上への **C^r 級微分同型写像**といい，また U と U' とは **C^r 級微分同型**であるという．

R^m の開集合 O からアフィン空間 M における曲面 Σ への写像 Φ を考える．O の任意の点 a に対して添数 α を適当に選ぶことにより $\Phi(a) \in S_\alpha$ とすることができるが，O から R^{d} への写像 $\psi_\alpha \circ \Phi$ が a の近傍で C^r 級であるとき，Φ は a で C^r 級であるという．Φ が O の各点で C^r 級であるとき，Φ は O で C^r 級であるという．Φ が C^r 級であることの定義は S_α の選び方によらない．写像 $\Phi: O \to \Sigma$ が C^r 級ならば，アフィン空間 M への写像としても C^r 級である．

以下においては，C^r 級関数，C^r 級写像としては $r = \infty$ である場合のみを扱うこととし，これらを単に**可微分関数**，**可微分写像**という．また，関数あるいは写像が**可微分**であるとは，それらが C^∞ 級であることを指すこととする．**微分同型写像**，**微分同型**とは，それぞれ C^∞ 級微分同型写像，C^∞ 級微分同型のことを意味するものとする．

2.4　接アフィン空間，法アフィン空間

3 次元 Euclid 空間の場合でよく知られている曲線，曲面の接ベクトルの概念のアフィン空間における曲面の場合への一般化，法線ベクトルの概念の計量アフィン空間における曲面の場合への一般化を考えよう．

定義 2.4.1. アフィン空間 M における d 次元曲面 Σ について，その座標近傍 (S, ψ) を考える．$\phi \overset{\mathrm{def}}{=} \psi^{-1}$ とすると，これは $D^{\mathrm{d}} = \psi(S)$ から S への微分同型写像であるが，D^{d} における点を表す座標 $(u^1, \cdots, u^{\mathrm{d}})$ につい

て，d − 1 個の u^μ $(\nu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}, \mu \neq \nu)$ をある値 U^μ に固定して[19)]，$C_\nu \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\phi(U^1, \cdots, u^\nu, \cdots, U^{\mathrm{d}}) | (U^1, \cdots, u^\nu, \cdots, U^{\mathrm{d}}) \in D^{\mathrm{d}}\}$ として，C_ν を u^ν 曲線という．また，$\{M; V\}$ の座標枠 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ を用いると，ϕ は (2.21) で表され，各 Z^μ $(\mu = 1, 2, \cdots, n)$ は可微分である．C_ν 上の点 P に対して，ベクトル

$$\vec{\phi}_\nu(P) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial Z^\mu}{\partial u^\nu}\right)_{\psi(P)} \vec{e}_\mu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}) \tag{2.33}$$

を P における C_ν の**接ベクトル**という．

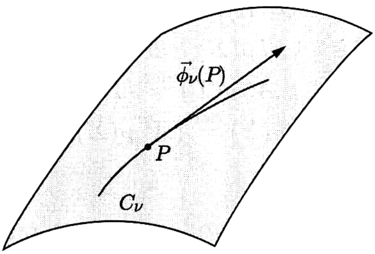


図 **2.8** 接ベクトル $\vec{\phi}_\nu(P)$

命題 2.4.1. 上の接ベクトルの定義は座標枠のとり方に依存しない．すなわち，ある座標枠 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ を用いたときの (2.33) の右辺と，任意の座標枠 $[O'; \{\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n\}]$ を用いて ϕ を (2.22) と表したときの

$$\left(\frac{\partial Z'^\mu}{\partial u^\nu}\right)_{\psi(P)} \vec{e}'_\mu \tag{2.34}$$

とは一致する．

証明：(2.21) と (2.22)，それぞれの両辺を u^ν で偏微分することによって容易に示される．

接ベクトル $\vec{\phi}_\nu(P)$ は，(2.24) で定義される Jacobi の行列の要素 $J^\mu{}_\nu$ の $\psi(P)$ における値を $J^\mu{}_\nu(\psi(P))$ と表すと $\vec{\phi}_\nu(P) = \sum_{\mu=1}^{n} J^\mu{}_\nu(\psi(P))\vec{e}_\mu$ と表されることに注意しよう．

19) U^μ は，D^{d} の元 $(U^1, \cdots, u^\nu, \cdots, U^{\mathrm{d}})$ が存在するようにとるものとする．D^{d} は開集合であるから，このような元が 1 つ存在すれば，その元の近傍であって D^{d} に含まれるものが存在する．

命題 2.4.2. d 次元曲面について，その任意の点 P における接ベクトルの組 $\{\vec{\phi}_1(P),\cdots,\vec{\phi}_{\mathrm{d}}(P)\}$ は線型独立である．

証明： P を曲面上の任意の点とする．$c^\nu \quad (\nu = 1,2,\cdots,\mathrm{d})$ を実数として $\sum_{\nu=1}^{\mathrm{d}} c^\nu \vec{\phi}_\nu(P) = \sum_{\nu=1}^{\mathrm{d}} \sum_{\mu=1}^{n} c^\nu J^\mu{}_\nu(\psi(P))\vec{e}_\mu = \vec{0}$ とおくと，$\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ が線型独立であることにより，$\sum_{\nu=1}^{\mathrm{d}} c^\nu J^\mu{}_\nu(\psi(P)) = 0 \ (\mu = 1,2,\cdots,n)$ である．曲面の定義（= 定義 2.3.2）[20] によって Jacobi の行列 $(J^\mu{}_\nu(\psi(P))$ の階数は d であるから，この行列から $n-\mathrm{d}$ 個の行を除くことによって得られる d 次正方行列で正則なものが存在する．したがって $c^\nu = 0$ であり，命題は成り立つ．

定義 2.4.2. 接ベクトルの組 $\{\vec{\phi}_1(P),\cdots,\vec{\phi}_{\mathrm{d}}(P)\}$ によって張られる線型空間を点 P における Σ の**接ベクトル空間**といい $T_P(\Sigma)$ と表す．$T_P(\Sigma)$ の元を点 P における Σ の**接ベクトル**という．また，$A^T{}_P(\Sigma) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{P+\vec{v}|\vec{v}\in T_P(\Sigma)\}$ として，$\{M;V\}$ の部分アフィン空間 $\mathcal{A}^T{}_P(\Sigma) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{A^T{}_P(\Sigma);T_P(\Sigma)\}$ を点 P における Σ の**接アフィン空間**という．

命題 2.4.3. $T_P(\Sigma), A^T{}_P(\Sigma)$ の定義は座標近傍のとり方によらない．すなわち，点 $P\in S'$ なる任意の座標近傍 (S',ψ') をとって，定義 2.4.2 におけるのと同様にして接ベクトル空間 $T'_P(\Sigma)$ と接アフィン空間 $\mathcal{A}'^T{}_P(\Sigma)$ をつくると，$T'_P(\Sigma) = T_P(\Sigma)$, $\mathcal{A}'^T{}_P(\Sigma) = \mathcal{A}^T{}_P(\Sigma)$ である．

証明：
$$\vec{\phi}'_\nu(P) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial Z^\lambda}{\partial u'^\nu}\right)_{\psi'(P)} \vec{e}_\lambda = \left(\frac{\partial u^\lambda}{\partial u'^\nu}\right)_{\psi'(P)} \vec{\phi}_\lambda(P) \tag{2.35}$$
および行列 $(\partial u^\lambda/\partial u'^\nu)$ の $\psi'(P)$ における値の正則性により明らかである．

$T_P(\Sigma)$ の次元数は d であり，したがって $\mathcal{A}^T{}_P(\Sigma)$ の次元数は d である．また，$\{\vec{\phi}_1(P),\cdots,\vec{\phi}_{\mathrm{d}}(P)\}$ は $T_P(\Sigma)$ の基底である．

n 次元計量アフィン空間 $\mathcal{M}^{(a,n-a)} = \{M;V^{(a,n-a)}\}$ における d 次元曲面 Σ に対して，$N_P(\Sigma) = \{\vec{v}\in V|g(\vec{v},\vec{u}) = \mathrm{o}, \forall\vec{u}\in T_P(\Sigma)\}$ を点 P における Σ の**法ベクトル空間**という．$N_P(\Sigma)$ の任意の元を，P における**法ベクトル**という．また，$A^N{}_P(\Sigma) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{P+\vec{v}|\vec{v}\in N_P(\Sigma)\}$ として，$\mathcal{M}^{(a,n-a)}$ の部分アフィン空間 $\mathcal{A}^N{}_P(\Sigma) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{A^N{}_P(\Sigma);N_P(\Sigma)\}$ を点 P における Σ の**法ア**

[20] 曲面片の定義（= 定義 2.3.1）も参照．

フィン空間という．$N_P(\Sigma)$ の次元数は $n-\mathrm{d}$ であり，したがって $\mathcal{A}^N{}_P(\Sigma)$ の次元数も $n-\mathrm{d}$ である．

接ベクトルに直交するベクトルが法ベクトルであり，この意味において法アフィン空間は接アフィン空間に直交するアフィン空間である．

アフィン空間 M について，命題 2.3.3 に続く記述で述べた座標近傍 (M,Ψ) における座標系 $(x^1,\cdots,x^n)$ をとって接ベクトル

$$\vec{\Phi}_\nu(P) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial u^\nu}\right)_{\Psi(P)} \vec{e}_\mu \qquad (\mu,\nu=1,2,\cdots,n) \tag{2.36}$$

を考えると，これはすべての P について $\vec{e}_\nu$ と一致する．したがって，接ベクトル空間 $T_P(M)$ と接アフィン空間 $\mathcal{A}^T{}_P(M)$ は，それぞれ R^n およびアフィン空間 $\{M;V\}$ それ自身と一致する．また，$\{M;V\}$ が計量アフィン空間の場合，その法ベクトル空間 $N_P(M)$，法アフィン空間 $\mathcal{A}^N{}_P(M)$ はいずれも 0 次元である．

第3章　テンソル場，微分形式とその積分

この章では，アフィン空間とこの空間における曲面における接ベクトル，ベクトル場，テンソル場，微分形式とその外微分，積分等について述べる[1]．これらは力学，電磁気学の法則，さらには特殊相対論の定式化において基本的役割を果たす．

3.1　接ベクトル，接ベクトル空間

前章の最後の部分で，曲面 Σ 上の曲線の点 P における接ベクトルと，それらの線型結合がつくる線型空間としての接ベクトル空間を考えた．ここでは，接ベクトル，接ベクトル空間の別の定義を与え，2 種類の定義の関係をみることにしよう．

定義 3.1.1. n 次元実アフィン空間 $\{M; V\}$ における d 次元曲面 $\Sigma = \bigcup_{\alpha\in A} S_\alpha$ において，Σ の点 P の Σ における近傍で定義された可微分（実数値）関数全体の集合を $F_P[\Sigma]$ と表して，以下の条件 **[T1]**，**[T2]** を共に満足する写像 $v : F_P[\Sigma] \to R$ を点 P における Σ の**接ベクトル**という：

[T1]　$v(af + bg) = av(f) + bv(g), \forall f, g \in F_P[\Sigma], \forall a, b \in R$

[T2]　$v(fg) = f(P)v(g) + v(f)g(P), \forall f, g \in F_P[\Sigma]$

条件 **[T1]**，**[T2]** から推定されるように，v **は微分演算子である**．このことは命題 3.1.2 に至って明白になる．

---

1) 本章の最後の部分で示すように，微分形式の理論は 3 次元 Euclid 空間におけるベクトル解析の理論を包摂するものである．

定義 3.1.2. 点 P における Σ の接ベクトル全体の集合を $T_P(\Sigma)$ とする[2)]．a, b を任意の実数，v_1, v_2 を $T_P(\Sigma)$ の任意の元として，

$$(a \cdot v_1 \oplus b \cdot v_2)(f) \stackrel{\text{def}}{=} a(v_1(f)) + b(v_2(f)), \ \ \forall f \in F_P[\Sigma] \qquad (3.1)$$

によって線型結合 $a \cdot v_1 \oplus b \cdot v_2$ を定義する．

命題 3.1.1. $\{T_P(\Sigma); R, +, \times, \oplus, \cdot\}$ は線型空間である．

証明：a, b, c を任意の実数，f, g を $F_P[\Sigma]$ の任意の元とする．v_1, v_2 を $T_P(\Sigma)$ の任意の元とすると，$(v_1 \oplus v_2)(af + bg) = v_1(af + bg) + v_2(af + bg) = a(v_1(f)) + b(v_1(g)) + a(v_2(f)) + b(v_2(g)) = a(v_1(f) + v_2(f)) + b(v_1(g) + v_2(g)) = (a \cdot (v_1 \oplus v_2))(f) + (b \cdot (v_1 \oplus v_2))(g)$ である．ここに (3.1) と接ベクトルの条件 **[T1]** を用いた．さらに (3.1) と条件 **[T2]** を用いると $(v_1 \oplus v_2)(fg) = v_1(fg) + v_2(fg) = f(P)v_1(g) + v_1(f)g(P) + f(P)v_2(g) + v_2(f)g(P) = f(P)(v_1(g) + v_2(g)) + (v_1(f) + v_2(f))g(P) = f(P)((v_1 \oplus v_2)(g)) + ((v_1 \oplus v_2)(f))g(P)$ を得る．かくて $v_1 \oplus v_2 \in T_P(\Sigma)$ であることがわかった．v を $T_P(\Sigma)$ の任意の元とすると，$(c \cdot v)(af + bg) = c(v(af + bg)) = c(av(f) + bv(g)) = (ca)v(f) + (cb)v(g) = a((c \cdot v)(f)) + b((c \cdot v)(g))$ である．ここに (3.1) と **[T1]** を用いた．また (3.1) と **[T2]** を用いると，$(c \cdot v)(fg) = c(v(fg)) = c(f(P)v(g) + v(f)g(P)) = f(P)((c \cdot v)(g)) + ((c \cdot v)(f))g(P) = f(P)(c \cdot v)(g) + ((c \cdot v)(f))g(P)$ が得られる．これらのことから，$\{T_P(\Sigma); R, +, \times, \oplus, \cdot\}$ が線型空間の定義（=定義 1.1.1）における条件 **[L1]**，**[L2]** を満足することがわかる．したがって命題は成り立つ．

線型空間 $\{T_P(\Sigma); R, +, \times, \oplus, \cdot\}$ を Σ の点 P における**接ベクトル空間**という[3)]．

以下，$\{T_P(\Sigma); R, +, \times, \oplus, \cdot\}$ のことを単に $T_P(\Sigma)$ と記し，$a \cdot v_1 \oplus b \cdot v_2$ のことを $av_1 + bv_2$ と略記する．

d 次元曲面 $\Sigma = \bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$ の 1 つの曲面片 $S_\alpha = \phi_\alpha({D_\alpha}^{\mathrm{d}})$ を考え，添数 α を省略して単に $S = \phi(D^{\mathrm{d}})$ と記すことにする．この曲面片における局所

---

2) 記号 $T_P(\Sigma)$ は定義 2.4.2 にも現れた．これら 2 つのものは記号は同じであるが現段階では互いに別のものである．この節の終わりの部分で，これらは本質的には同一であることが明らかになる．

3) この空間の元 v はベクトルであるが，$\vec{v}$ とは書かないことにする．

座標系を $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ とする．$P \in S$ として，

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)_P, \quad \forall f \in F_P[\Sigma] \qquad (\mu = 1,2,\cdots,\mathrm{d}) \tag{3.2}$$

により，写像

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P : F_P[\Sigma] \to R \tag{3.3}$$

を定義する．なお，(3.2) の右辺は (2.30) の仕方で定義されているものとする．$(\partial/\partial x^\mu)_P$ は**微分演算子**である．

命題 3.1.2. $(\partial/\partial x^\mu)_P \quad (\mu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d})$ は $T_P(\Sigma)$ の元であり，これら d 個の組 $\{(\partial/\partial x^1)_P, \cdots, (\partial/\partial x^{\mathrm{d}})_P\}$ は $T_P(\Sigma)$ の基底である．

証明: $(\partial/\partial x^\mu)_P$ が定義 3.1.1 の条件 **[T1]**，**[T2]** を満足しており，したがって命題の前半部分が成り立つことは明らかである．$\{(\partial/\partial x^1)_P, \cdots, (\partial/\partial x^{\mathrm{d}})_P\}$ が線型独立であることを示そう．$T_P(\Sigma)$ の零ベクトルを 0_P と表すことにして，$c^\mu(\partial/\partial x^\mu)_P = 0_P$ とする．すると $F_P[\Sigma]$ の任意の元 f に対して，$c^\mu(\partial/\partial x^\mu)_P f = c^\mu(\partial f/\partial x^\mu)(P) = 0$ である．ここで f として $x^\nu \quad (\nu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d})$ をとると，$c^\mu(\partial/\partial x^\mu)_P x^\nu = c^\nu = 0$ を得る．ゆえに，$\{(\partial/\partial x^1)_P, \cdots, (\partial/\partial x^{\mathrm{d}})_P\}$ は線型独立である．次に，$T_P(\Sigma)$ の任意の元 v はこの組の線型結合として表されることを示そう．まず，任意の定数 K に対して $v(K) = 0$ である．なぜならば，$1 = 1 \times 1$ であるから，**[T2]** によって $v(1) = 1v(1) + v(1)1 = v(1) + v(1) = 0$ となり，さらに $K = K \times 1$ であること，および **[T1]** によって，$v(K) = Kv(1) = 0$ を得る．$F_P[\Sigma]$ の任意の元 f は実多変数関数についての Taylor の定理によって

$$f = f(P) + \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)_P (x^\mu - x^\mu(P)) + f_{\mu\nu}(x^\mu - x^\mu(P))(x^\nu - x^\nu(P)), \quad f_{\mu\nu} \in F_P[\Sigma] \tag{3.4}$$

という形に表される．この表示と，**[T1]**，**[T2]** および任意の定数 K について $v(K) = 0$ であることを用いることにより，

$$v(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)_P v(x^\mu) = v(x^\mu)\left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)_P = v(x^\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P f \tag{3.5}$$

が示される．したがって

$$v = v(x^\mu)\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P \tag{3.6}$$

である．以上のこと，および命題 1.1.4 により，本命題の後半部分が成り立つことがわかる．

上の命題は $\dim T_P(\Sigma) = \mathrm{d}$ であることを意味する．接ベクトルの組 $\{(\partial/\partial x^1)_P, \cdots, (\partial/\partial x^{\mathrm{d}})_P\}$ のことを局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ における $T_P(\Sigma)$ の**自然基底**という．また，接ベクトル v の表示 (3.6) において $\xi^\mu \overset{\mathrm{def}}{=} v(x^\mu)$ と定義して[4)]，$(\xi^1, \cdots, \xi^{\mathrm{d}})$ のことを局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ に関する v の成分という．自然基底は局所座標系ごとに 1 つ定まり，接ベクトル v の成分も対応して 1 つ定まる．(2.32)，(3.2) を用いて容易に示されるように，2 つの局所座標系に対応する自然基底および**接ベクトルの成分**に関して次の命題が成り立つ．

命題 3.1.3. S_α, S_β は共に曲面 Σ の曲面片であって，$S_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset$ であるものとする．$S_\alpha \cap S_\beta$ においては局所座標系 $({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^{\mathrm{d}})$, $({x_\beta}^1, \cdots, {x_\beta}^{\mathrm{d}})$ があるが，$P \in S_\alpha \cap S_\beta$ に対して接ベクトル $v \in T_P(\Sigma)$ のこれらの局所座標系に関する成分を，それぞれ $({v_\alpha}^1, \cdots, {v_\alpha}^{\mathrm{d}})$, $({v_\beta}^1, \cdots, {v_\beta}^{\mathrm{d}})$ と表す．このとき以下の関係が成り立つ：

$$\left(\frac{\partial}{\partial {x_\beta}^\nu}\right)_P = \left(\frac{\partial {x_\alpha}^\mu}{\partial {x_\beta}^\nu}\right)_P \left(\frac{\partial}{\partial {x_\alpha}^\mu}\right)_P$$
$${v_\beta}^\nu = \left(\frac{\partial {x_\beta}^\nu}{\partial {x_\alpha}^\mu}\right)_P {v_\alpha}^\mu \tag{3.7}$$

$a < b$ として開区間 (a, b) から曲面 Σ への写像，すなわち (a, b) で定義された Σ 上の曲線 Γ を考える．$s \in (a, b)$ に対して $\Gamma(s)$ の近傍における局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ をとって，

$$\Gamma^\mu(s) \overset{\mathrm{def}}{=} x^\mu(\Gamma(s)) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}) \tag{3.8}$$

とおいて，

$$\frac{D\Gamma(s)}{Ds} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{d\Gamma^\mu(s)}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_{\Gamma(s)} \tag{3.9}$$

---

4) ξ^μ はギリシャ文字 ξ（グザイ）に上付きの添数としてギリシャ文字 μ を付けたもの．

とする[5]．容易に確かめられるように，この式の右辺は局所座標系のとり方に依存しない．また，$F_{\Gamma(s)}[\Sigma]$ の任意の元 f に対して $(D\Gamma(s)/Ds)(f) = df(\Gamma(s))/ds$ である．

$D\Gamma(s)/Ds$ を，Γ の点 $\Gamma(s)$ における接ベクトルとよぶ．この接ベクトルは**速度ベクトル**ともよばれ，第 4 章において質点の**速度**がこれに基づいて定義される．

とくに，$\Sigma = M$ の場合，局所座標系として座標枠 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ に関する座標系 $(y^1, \cdots, y^n)$ をとると，曲線 Γ は $\Gamma^\mu(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} y^\mu(\Gamma(s))$ を用いて

$$\Gamma(s) = O + \overrightarrow{O\Gamma(s)} = O + \Gamma^\mu(s)\vec{e}_\mu \tag{3.10}$$

と表されるが，

$$\frac{D\Gamma(s)}{Ds} = \frac{d\Gamma^\mu(s)}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)_{\Gamma(s)} \tag{3.11}$$

となる．

ところで，定義 3.1.1 における接ベクトルと前章の **2.4** 節で考えた u^ν 曲線 C_ν の接ベクトルとは見かけ上大変異なっている．後者は直観的にわかりやすいのに対して，前者は微分演算子であって直観的にはわかり難い[6]．これらの間の関係をみておこう．$S = \phi(D^{\mathrm{d}})$ を d 次元曲面 Σ を構成する 1 つの曲面片として $P = \phi(u^1, \cdots, u^{\mathrm{d}})$ における接ベクトルについて考えよう．容易にわかるように，

$$\left.\begin{array}{r} \left(\dfrac{\partial f(\phi(u^1, \cdots, u^{\mathrm{d}}))}{\partial u^\nu}\right)_{\psi(P)} = \left(\dfrac{\partial Z^\mu}{\partial u^\nu}\right)_{\psi(P)} \left(\dfrac{\partial}{\partial y^\mu}\right)_P f \\ \forall f \in F_P[\Sigma] \end{array}\right\} \tag{3.12}$$

である．ここに $\psi \stackrel{\mathrm{def}}{=} \phi^{-1}$ であり，Z^μ は ϕ の表示 (2.21) の右辺における

---

5) (3.9) において記号 d はイタリック体である．微分，外微分の演算を表すのに d を用いるが，これを曲面の次元数を表すローマン体の記号 d と混同しないように．

6) 接ベクトルは，素朴には，高次元の “平らな” 空間の中に埋め込まれている曲面 Σ について第 2 章の図 2.8 に示したような Σ に “接して” いて高次元空間の中にあるベクトルである．しかし，曲面の一般化としての多様体は「より高次元の “平らな” 空間」の存在を前提として定義されるのではなく，それ自身として固有な (intrinsic) 仕方で定義される．したがって，その接ベクトルも「高次元の空間の存在を前提とすることなく定義する」ことになる．定義 3.1.1 は多様体論における標準的方式にのっとったものである．やや抽象的ではあるが「固有な仕方で定義する」ためにはこのような抽象化が必要なのである．

写像 $Z^\mu : D^{\mathrm{d}} \to R$ であり，$(y^1, \cdots, y^n)$ は座標枠 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ に関する座標系である．(3.12) の両辺は関数 f の定義 2.4.1 の意味における C_ν の接ベクトル $\vec{\phi}_\nu(P)$ 方向の方向微分である[7]．そこで，$\vec{\phi}_\nu(P) = (\partial Z^\mu / \partial u^\nu)_{\psi(P)} \vec{e}_\mu$ と $T_P(\Sigma)$ の元

$$\left(\frac{\partial Z^\mu}{\partial u^\nu}\right)_{\psi(P)} \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)_P \tag{3.13}$$

とを同一視する．この同一視によって，$\vec{\phi}_\nu(P)$ は定義 3.1.2 の意味における $T_P(\Sigma)$ の元と見なされることになる．定義 2.4.2，3.1.2 において，定義の異なる 2 つの対象に対して同一記号 $T_P(\Sigma)$ を用いたのは，この状況を先取りしてのことである．とくに，Σ が命題 2.3.2 に続く部分で考察した n 次元曲面片としての $M = \Phi(R^n)$ である場合を考えると，(3.12) は

$$\left(\frac{\partial f(\Phi(u^1, \cdots, u^n))}{\partial u^\nu}\right)_{\psi(P)} = \left(\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right)_P f, \quad \forall f \in F_P[M] \tag{3.14}$$

となる．またこのとき，(2.36) で定義されるベクトル $\vec{\Phi}_\nu(P)$ は $\vec{e}_\nu$ と一致するから，$(\partial / \partial y^\nu)_P \in T_P(M)$ は $\vec{e}_\nu$ **と同一視される**こととなる．したがって，(3.11) における接ベクトル $D\Gamma(s)/Ds$ を

$$\frac{D\Gamma(s)}{Ds} = \frac{d\Gamma^\mu(s)}{ds} \vec{e}_\mu \tag{3.15}$$

と表すこともできる．

3.2 関数の微分，写像の微分

アフィン空間 $\{M; V\}$ における d 次元曲面 Σ の開集合 U を考える．$P \in U$ として，可微分関数 $f : U \to R$ について

$$(df)_P(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} v(f), \quad \forall v \in T_P(\Sigma) \tag{3.16}$$

によって定義される写像 $(df)_P : T_P(\Sigma) \to R$ を f の P における**微分**という．

7) 方向微分については，例えば文献 [7] を参照．

命題 3.2.1. $(df)_P$ は $T_P(\Sigma)$ の双対空間 $(T_P(\Sigma))^*$ の元である．

証明: $T_P(\Sigma)$ の任意の 2 元 v_1, v_2，任意の実数 a, b に対して，$(df)_P(av_1+bv_2) = (av_1+bv_2)(f) = a(v_1(f)) + b(v_2(f)) = a(df)_P(v_1) + b(df)_P(v_2)$ である．ここで (3.1) を用いた．したがって，命題は成り立つ．

U 上の点 P の近傍における局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ をとって f として関数 x^μ $(\mu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d})$ をとると，これは可微分関数であり

$$(dx^\mu)_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)_P\right) = \delta^\mu{}_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}) \tag{3.17}$$

である．このことと命題 1.2.2 からわかるように，$\{(dx^1)_P, \cdots, (dx^{\mathrm{d}})_P\}$ は，自然基底 $\{(\partial/\partial x^1)_P, \cdots, (\partial/\partial x^{\mathrm{d}})_P\}$ に双対な $(T_P(\Sigma))^*$ の基底である．さらに (3.5)，$(df)_P$ の定義および (3.17) から容易にわかるように

$$(df)_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\mu}\right)_P (dx^\mu)_P \tag{3.18}$$

である．

φ を曲面 Σ から曲面 Ξ（グザイ）への可微分写像とする．このとき，

$$((\varphi_*)_P v)(f) \stackrel{\text{def}}{=} v(f \circ \varphi), \qquad \forall v \in T_P(\Sigma), \qquad \forall f \in F_{\varphi(P)}[\Xi] \tag{3.19}$$

により定義される $(\varphi_*)_P$ を φ の点 P における**微分**という．ここに $P \in \Sigma$ とし，$F_{\varphi(P)}[\Xi]$ は点 $\varphi(P)$ の近傍で定義された可微分関数全体の集合を表し，$f \circ \varphi$ は φ と f の積写像を表す．

命題 3.2.2. $(\varphi_*)_P$ は $T_P(\Sigma)$ から $T_{\varphi(P)}(\Xi)$ への線型写像である．

証明: まず $(\varphi_*)_P v \in T_{\varphi(P)}(\Xi), \forall v \in T_P(\Sigma)$ であることを示そう．$F_{\varphi(P)}[\Xi]$ の任意の 2 元 f, g，任意の実数 a, b に対して，$((\varphi_*)_P v)(af+bg) = v((af+bg) \circ \varphi)) = v(a(f\circ\varphi)+b(g\circ\varphi)) = av(f\circ\varphi)+bv(g\circ\varphi) = a((\varphi_*)_P v)(f)+b((\varphi_*)_P v)(g)$ である．ここに定義 3.1.1 の条件 **[T1]** を用いた．また $((\varphi_*)_P(v))(fg) = v((fg) \circ \varphi) = v((f\circ\varphi)(g\circ\varphi)) = f(\varphi(P))v(g\circ\varphi)+v(f\circ\varphi)g(\varphi(P)) = f(\varphi(P))((\varphi_*)_P v)(g)+((\varphi_*)_P v)(f)g(\varphi(P))$ である．ここに条件 **[T2]** を用いた．したがって，$(\varphi_*)_P v \in T_{\varphi(P)}(\Xi)$ である．また，$T_P(\Sigma)$ の任意の 2 元 v_1, v_2 に対して，$((\varphi_*)_P(av_1+bv_2))(f)$

$= (av_1 + bv_2)(f \circ \varphi) = a(v_1(f \circ \varphi)) + b(v_2(f \circ \varphi)) = a(((\varphi_*)_P v_1)(f)) + b(((\varphi_*)_P v_2)(f)) = (a(\varphi_*)_P v_1 + b(\varphi_*)_P v_2)(f)$ である．ここに (3.1) を用いた．よって，$(\varphi_*)_P$ は線型写像であり，命題は成り立つ．

命題 3.2.3. Σ の点 $P \in S = \phi(D^{\mathrm{d}})$ について S における局所座標系を $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ として，Ξ の曲面片 $T = \psi(D^{\mathrm{d}'})$ であって $\varphi(P)$ を含むものをとり，これに対応する座標系を $(y^1, \cdots, y^{\mathrm{d}'})$ とする．写像 $\psi^{-1} : T \to D^{\mathrm{d}'}$ を d' 個の関数 $\Psi^\alpha : T \to R$ $(\alpha = 1,2,\cdots,\mathrm{d}')$ を用いて，$\psi^{-1} = (\Psi^1, \cdots, \Psi^{\mathrm{d}'})$ と表すことにする．$\Phi^\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Psi^\alpha \circ \varphi$ とすると次の関係が成り立つ：

$$(\varphi_*)_P \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P = \left(\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)_P \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\varphi(P)} \tag{3.20}$$

Π(パイ)，Σ，Ξ を曲面とする．ψ を Π から Σ への，φ を Σ から Ξ への共に可微分な写像とし P を Π の点とすると，容易に示されるように

$$((\varphi \circ \psi)_*)_P = (\varphi_*)_{\psi(P)} \circ (\psi_*)_P \tag{3.21}$$

である．

3.3 部分曲面

φ を曲面 Σ から曲面 Ξ への可微分写像とする．Σ の各点 P において $(\varphi_*)_P$ が 1 対 1 の写像であるとき，φ を Σ の Ξ への**挿入**という．φ が挿入でありかつ 1 対 1 の写像であるとき，φ を Σ の Ξ への**埋め込み**という．



図 **3.1** 挿入と埋め込み

図の左側と右側は，それぞれ R^1 の R^2 への挿入と埋め込みを例示している．可微分写像 φ が1対1であっても，φ は挿入とは限らない．例えば，1次元アフィン空間 M^1 において，ある座標枠 $[O;\{\vec{e}\}]$ をとり M^1 の点を $P=O+x\vec{e}$ と表して，M^1 から M^1 自身への写像 Φ を $\Phi(P)\stackrel{\rm def}{=}O+x^3\vec{e}$ で定義すると[8]，Φ は M^1 から M^1 の上への1対1可微分写像であるが，$(\Phi_*)_P$ は $P=O$ において1対1でなく，したがって挿入ではない．ゆえに，Φ は埋め込みではない．

曲面 Σ,Ξ が以下の条件 **[SS1]**，**[SS2]** を共に満足するとき，Σ を Ξ の**部分曲面**という[9]： **[SS1]** Σ は Ξ の部分集合である．**[SS2]** Σ から Ξ への**包含写像**[10] $\imath$ は Σ の Ξ への埋め込みである．

Σ の開部分曲面[11]は Σ の部分曲面である．また，アフィン空間 M における任意の曲面 Σ は M の部分曲面である．

3.4 ベクトル場

曲面 Σ の開集合 U の各点 P に対して，P における接ベクトル X_P を対応させる写像 $X:P\to X_P$ を，U 上の**ベクトル場**（**あるいは反変ベクトル場**）という．また，X のことを $X=\{X_P\}_{P\in U}$ と表すことにする．

Σ それ自身も Σ の開集合であるから，Σ 上のベクトル場を考えることができる．また，曲面片 S の各点 P に対して，S における局所座標系 $(x^1,\cdots,x^{\rm d})$ に関する自然基底の元 $(\partial/\partial x^\mu)_P$ $(\mu=1,2,\cdots,{\rm d})$ を対応させると，S 上のベクトル場 $\partial/\partial x^\mu$ が得られる：

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\stackrel{\rm def}{=}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P\right\}_{P\in S} \tag{3.22}$$

---

8) ここでは，x^3 は実数 x の3乗を表す．

9) 一般の多様体を論ずる場面では，多様体 Σ,Ξ が **[SS1]**，**[SS2]** を満足するとき Σ を Ξ の部分多様体とよび，Ξ の部分多様体 Σ がさらに Ξ の部分位相空間である場合に Σ を Ξ の正規部分多様体とよんでいる [11]．本書においては曲面をアフィン空間の部分位相空間の一種として定義しているので，曲面 Σ が Ξ の部分集合であれば Σ は自動的に Ξ の部分位相空間になっている．多様体論における語法に倣うならば，本書の流儀での部分曲面は正規部分曲面とでもいうべきものである．

10) 付録 **B** の定義 B.7 を参照.

11) 定義 2.3.2 に続く記述を参照.

X を Σ 上のベクトル場とする．$(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ を Σ の曲面片 S における局所座標系，P を S 上の点とする．命題 3.1.2 により，X_P は ξ^μ $(\mu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d})$ を S 上の関数として

$$X_P = \xi^\mu(P) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)_P \tag{3.23}$$

と一意的に表される．d 個の関数の組 $\{\xi^1, \cdots, \xi^{\mathrm{d}}\}$ のことをベクトル場 X の局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ に関する**成分**という[12]．

S, S' を Σ の $S \cap S' \neq \emptyset$ なる曲面片，$(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ を S における局所座標系とし，$(x'^1, \cdots, x'^{\mathrm{d}})$ を S' における局所座標系とする．ベクトル場 X の $S \cap S'$ における，$(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ に関する成分，$(x'^1, \cdots, x'^{\mathrm{d}})$ に関する成分を，それぞれ $\{\xi^1, \cdots, x^{\mathrm{d}}\}, \{\xi'^1, \cdots, x'^{\mathrm{d}}\}$ と表すと，命題 3.1.3 から容易にわかるように次の関係が成り立つ：

$$\xi'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \xi^\nu \tag{3.24}$$

定義 3.4.1. 開集合 U の各点において，その点を含む任意の曲面片 S について，ベクトル場 X の座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ に関する成分を表す関数 ξ^μ $(\mu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d})$ がすべて C^r 級であるとき，X は U で C^r 級であるという．とくに，C^0 級のベクトル場，C^∞ 級のベクトル場のことを，それぞれ**連続なベクトル場（あるいは反変ベクトル場）**および**可微分なベクトル場（あるいは反変ベクトル場）**という．

X が C^r 級であることの上の定義は局所座標系のとり方によらない．

U 上のベクトル場の全体の集合，U 上の C^∞ 級関数（=可微分関数）全体の集合を，それぞれ $\mathfrak{X}[U], C^\infty[U]$ と表す．以下ではとくに断らない限り，ベクトル場は C^∞ 級（=可微分）であるものとする．

f を $C^\infty[U]$ の任意の元，X, Y を $\mathfrak{X}[U]$ の任意の 2 元とする．

$$(fX)_P \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(P) X_P, \quad \forall P \in U \tag{3.25}$$

$$(X + Y)_P \stackrel{\mathrm{def}}{=} X_P + Y_P, \quad \forall P \in U \tag{3.26}$$

---

[12] 命題 3.1.2 に続く記述に現れる ξ^μ 等は単なる実数であるが，**ここにおける ξ^μ は曲面片 S 上の実数値関数である**ことに注意すること．

により $fX, X+Y$ を定義して，これらを，それぞれ f と X の積，X と Y の和という．明らかに，これらはいずれも $\mathfrak{X}[U]$ の元である．また，この定義と (3.23) により，$\mathfrak{X}[\Sigma]$ の元 X は S 上で

$$X = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{3.27}$$

と表されることがわかる．

3.5 テンソル場と微分形式

曲面 Σ の開集合 U の各点 P に $T_P(\Sigma)$ 上の q 階共変テンソル $t_P \in \otimes_q(T_P(\Sigma))$ を対応させる写像 $t : U \to \otimes_q(T_P(\Sigma))$ を U 上の **q 階共変テンソル場**という[13]．1 階共変テンソル場のことを**共変ベクトル場**ともいう．U の各点 P に $T_P(\Sigma)$ 上の q 階対称共変テンソル $s_P \in S_q(T_P(\Sigma))$ を対応させる写像 $s : U \to S_q(T_P(\Sigma))$ を U 上の**q 階対称共変テンソル場**とよび，このテンソル場は**対称**であるという．また，U の各点 P に $T_P(\Sigma)$ 上の q 階交代共変テンソル $\omega_P \in A_q(T_P(\Sigma))$ を対応させる写像 $\omega : U \to A_q(T_P(\Sigma))$ を U 上の**q 階交代共変テンソル場**（あるいは**q 次微分形式**）といい，このテンソル場は**交代**であるという．q 次微分形式のことを単に**$q-$ 形式**ともいう．U 上の実数値関数のことを**スカラー場**という．1 階共変テンソル場，1 階対称共変テンソル場，共変ベクトル場，1− 形式はすべて同義語である．

反変テンソル場，**対称反変テンソル場**，**交代反変テンソル場**，反変テンソル場の対称，交代の概念，**p 階反変 q 階共変テンソル場**（あるいは**$[p,q]$ 型のテンソル場**）も上と同様の方法で定義される．$p \geq 1, q \geq 1$ であるときの $[p,q]$ 型のテンソル場を**混合テンソル場**という．1 階反変テンソル場，1 階対称反変テンソル場，1 階交代反変テンソル場，反変ベクトル場はすべて同義語である．対称共変テンソル場，対称反変テンソル場を総称して**対称テンソル場**とよび，交代共変テンソル場，交代反変テンソル場を総称して**交代テンソル場**とよぶ．スカラー場，0 階共変テンソル場，0 階反変テンソル場，0 階対称テンソル場，0− 形式，0 階交代テンソル場はすべて同義

13) t_P が $T_P(\Sigma)$ 上のテンソルである．テンソル場を表す記号 t を第 1 章における V 上のテンソルの記号 t と混同しないように．

語である．Σ の次元数を d とすると，$T_P(\Sigma)$ 上の 0 でない交代共変テンソルは d 階以下であるから，d+1 以上の次数の微分形式は 0 である．同様に d+1 以上の階数の交代反変テンソル場は 0 である．

混合テンソル場の r 番目の反変添数と s 番目の共変添数についての**縮約** ${C^r}_s$ も自然な仕方で定義され，その内容の成分による表示も混合テンソルの縮約に対する第 1 章の部分節 **1.2.4** で与えた表示に対応するものとなる．

U 上の，p 階共変テンソル場，p 階対称共変テンソル場，p 階交代共変テンソル場（p– 形式），p 階反変テンソル場，p 階対称反変テンソル場，p 階交代反変テンソル場，$[p,q]$ 型のテンソル場，それぞれの全体の集合を $\otimes_p[U]$, $S_p[U]$, $A_p[U]$, $\otimes^p[U]$, $S^p[U]$, $A^p[U]$, ${\otimes^p}_q[U]$ と記す．

s,t を共に U 上の任意の p 階共変テンソル場，f を U 上の任意の実数値関数とする．このとき

$$(s+t)_P \stackrel{\text{def}}{=} s_P + t_P, \quad \forall P \in U \tag{3.28}$$

$$(ft)_P \stackrel{\text{def}}{=} f(P)t_P, \quad \forall P \in U \tag{3.29}$$

によって $s+t, ft$ を定義して，これらをそれぞれ s と t の和および f と t の積という．$\otimes_p[U]$, $S_p[U]$, $A_p[U]$ はいずれも上で定義された和の演算と関数倍の演算に関して閉じている．すなわち s,t が $\otimes_p[U]$ の元である場合，$S_p[U]$ の元である場合，$A_p[U]$ の元である場合のそれぞれに応じて，$s+t, ft$ は，$\otimes_p[U]$ の元，$S_p[U]$ の元，$A_p[U]$ の元である．このことから，$\otimes_p[U]$, $S_p[U]$, $A_p[U]$ は，いずれも線型空間（無限次元）を構成していることがわかる．

$s \in \otimes_p[U], t \in \otimes_q[U]$ とする．このとき

$$(s \otimes t)_P \stackrel{\text{def}}{=} s_P \otimes t_P, \quad \forall P \in U \tag{3.30}$$

によって $s \otimes t$ を定義して，これを s と t の**テンソル積**という．命題 1.2.7, 定義 1.2.1 からわかるように，(3.30) の右辺は $p+q$ 階共変テンソルである．したがって，$s \otimes t$ は U 上の $p+q$ 階共変テンソル場である．

共変テンソル場の定義，それらの和，関数倍，テンソル積の定義および命題 1.2.8 により明らかなように，次の命題が成り立つ．

命題 3.5.1. f_1, f_2 を U 上のスカラー場，s_1, s_2, s を $\otimes_p[U]$ の元，t_1, t_2, t を $\otimes_q[U]$ の元，u を $\otimes_r[U]$ の元とすると，以下の関係が成り立つ：

$$\left.\begin{aligned}(f_1s_1 + f_2s_2)\otimes t = f_1(s_1\otimes t) + f_2(s_2\otimes t)\\ s\otimes(f_1t_1 + f_2t_2) = f_1(s\otimes t_1) + f_2(s\otimes t_2)\end{aligned}\right\} \tag{3.31}$$

$$s\otimes(t\otimes u) = (s\otimes t)\otimes u \tag{3.32}$$

(3.31) から $(fs)\otimes t = s\otimes(ft) = f(s\otimes t)$ が導かれる．f は任意のスカラー場を表す．また，(3.32) により $s\otimes(t\otimes u), (s\otimes t)\otimes u$ のことを共に $s\otimes t\otimes u$ と記してよいことがわかる．4個以上の共変テンソル場のテンソル積についても同様である．なお，演算 $\otimes$ は可換ではない．

命題 3.5.2. $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ を曲面 Σ の曲面片 S における局所座標系とする．Σ 上の任意の q 階共変テンソル場 t は，S 上で関数 $t_{\mu_1\cdots\mu_q}$ を用いて一意的に

$$t = t_{\mu_1\cdots\mu_q}dx^{\mu_1}\otimes\cdots\otimes dx^{\mu_q} \tag{3.33}$$

と表される．ここに，$t_{\mu_1\cdots\mu_q}$ は次式で与えられる：

$$t_{\mu_1\cdots\mu_q}(P) = t_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}}\right)_P, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}}\right)_P\right), \quad P\in S \tag{3.34}$$

証明：t_P は $\otimes_q(T_P(\Sigma))$ の元であり，$\{(\partial/\partial x^1)_P, \cdots, (\partial/\partial x^{\mathrm{d}})_P\}$ は $T_P(\Sigma)$ の基底であり，$\{(dx^1)_P, \cdots, (dx^{\mathrm{d}})_P\}$ はその双対基底である．したがって命題 1.2.11 によって，t_P は

$$t_P = t_{\mu_1\cdots\mu_q}(P)(dx^{\mu_1})_P\otimes\cdots\otimes(dx^{\mu_q})_P \tag{3.35}$$

と一意的に表され，かつ $t_{\mu_1\cdots\mu_q}(P)$ は (3.34) で与えられる．このことと，テンソル場の和，関数倍，テンソル積の定義を用いることにより，(3.33) が得られる．

上の命題における $\{t_{\mu_1\cdots\mu_q}|\mu_1, \cdots, \mu_q = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}\}$ を t の局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ に関する**成分**という．

S, S' を曲面 Σ の $S\cap S'\neq\emptyset$ なる曲面片として，S, S' における局所座標系を，それぞれ $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$, $(x'^1, \cdots, x'^{\mathrm{d}})$ とする．Σ 上の q 階共変テンソ

ル場 t のこれらの局所座標系に関する成分を，それぞれ $t_{\mu_1\cdots\mu_q}$, ${t'}_{\mu_1\cdots\mu_q}$ と表すと，次の関係が成り立つ：

$$ {t'}_{\mu_1\cdots\mu_q} = \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\nu_q}}{\partial x'^{\mu_q}} t_{\nu_1\cdots\nu_q} \tag{3.36} $$

このことは命題 3.1.3, 3.5.2 を用いて容易に示される．

ベクトル場，テンソル場の定義についてのコメント： 特殊相対論の入門書においては，Σ として 4 次元 Minkowski 空間 $\mathcal{M}^{(1,3)} = \{M; V^{(1,3)}\}$ の基礎空間 M をとり，座標系を正規直交座標系に限定して（したがって，座標変換を Poincaré 座標変換に限定して）変換則 (3.24) に従う関数の全体 $\{\xi^\mu | \mu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}\}$ で定まる“或るもの”のことを M 上の反変ベクトル場とよび，変換則 (3.36) に従う関数の全体 $\{t_{\mu_1\cdots\mu_q} | \mu_1, \cdots, \mu_q = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}\}$ で定まる“或るもの”のことを q 階共変テンソル場とよんでいる場合が多い．しかし，この定義は，座標系を限定している点，およびベクトル場 X，テンソル場 t の顕な表示を与えていないという点において不十分である [14]．

命題 1.2.17 から明らかなように，共変テンソル場が対称（交代）であるための必要十分条件は，各点 P について，P を含むある曲面片 S における局所座標系に関する成分の P における値が対称（交代）であることである．

U を Σ の開集合，P を U 上の点とし，S を P の近傍とする．q 階共変テンソル場 t について，S における局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ に関する成分を表す d^q 個の関数 $t_{\mu_1\cdots\mu_q}$ がすべて点 P で可微分（連続）であるとき，t は P で**可微分（連続）**であるという．t が U のすべての点で可微分（連続）であるとき，t は U で可微分（連続）であるという．Σ が可微分であることによって明らかなように，t の可微分性（連続性）に関する上の定義は局所座標系のとり方によらない．さらに，f, s, t がすべて可微分（連続）であるならば $ft, s+t, s \otimes t$ はすべて可微分（連続）である．

対称共変テンソル場，微分形式はいずれも共変テンソル場であるから，これらの場の成分とその変換性，可微分性（連続性）についても上述のことが当てはまることに注意しよう．

(3.18) から明らかなように，次の命題が成り立つ．

14）命題 1.2.13 に続く記述を参照．

命題 3.5.3. f を $C^\infty[U]$ の元とする．U の各点 P に $(df)_P$ を対応させる写像 $df : U \to (T_P(\Sigma))^*$ は U 上の可微分な 1− 形式である．

微分形式の外積を定義しよう．ω, ϑ を，それぞれ p− 形式，q− 形式とする．このとき

$$(\omega \wedge \vartheta)_P \stackrel{\text{def}}{=} \omega_P \wedge \vartheta_P, \quad \forall P \in U \tag{3.37}$$

によって $\omega \wedge \vartheta$ を定義して，これを ω と ϑ の**外積**という．ω, ϑ が共に 1− 形式である場合は，$\omega \wedge \vartheta = \omega \otimes \vartheta - \vartheta \otimes \omega = -(\vartheta \wedge \omega)$ である．

共変テンソル場の定義, それらの和と関数倍の定義，および微分形式の外積の定義と交代形式についての対応する命題（=命題 1.2.25）により明らかなように，次の命題が成り立つ．

命題 3.5.4. f_1, f_2 を U 上のスカラー場，$\omega_1, \omega_2, \omega$ を $A_p[U]$ の元，$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta$ を $A_q[U]$ の元，η を $A_r[U]$ の元とすると，以下の式が成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} (f_1\omega_1 + f_2\omega_2) \wedge \vartheta = f_1(\omega_1 \wedge \vartheta) + f_2(\omega_2 \wedge \vartheta) \\ \omega \wedge (f_1\vartheta_1 + f_2\vartheta_2) = f_1(\omega \wedge \vartheta_1) + f_2(\omega \wedge \vartheta_2) \end{array}\right\} \tag{3.38}$$

$$\omega \wedge (\vartheta \wedge \eta) = (\omega \wedge \vartheta) \wedge \eta \tag{3.39}$$

(3.38) から，f を任意のスカラー場として $(f\omega) \wedge \vartheta = \omega \wedge (f\vartheta) = f(\omega \wedge \vartheta)$ が得られる．また，(3.39) により，$\omega \wedge (\vartheta \wedge \eta), (\omega \wedge \vartheta) \wedge \eta$ のことを共に $\omega \wedge \vartheta \wedge \eta$ と記してよいことがわかる．4 個以上の微分形式の外積についても同様である．

$(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ を Σ の曲面片 S における局所座標系とする．Σ 上の任意の q− 形式 ω は S 上で共変テンソル場としての ω の成分[15] $\omega_{\mu_1 \cdots \mu_q}$ を用いて一意的に

$$\omega = \frac{1}{q!}\omega_{\mu_1 \cdots \mu_q} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q} \tag{3.40}$$

と表される．このことは命題 1.2.27 の証明と共変テンソル場の定義により明らかである．

15）交代テンソル場の成分は交代であるようにとってあるものとする．

命題 3.5.5. ω, ϑ を，それぞれ $p-$ 形式および $q-$ 形式とすると $\omega \wedge \vartheta$ は $(p+q)-$ 形式であり，また

$$\omega \wedge \vartheta = (-1)^{pq} \vartheta \wedge \omega \tag{3.41}$$

である．さらに，ω, ϑ が共に可微分（連続）であるならば $\omega \wedge \vartheta$ も可微分（連続）である．

証明：$\omega_P \wedge \vartheta_P$ は $p+q$ 次交代形式であるから，$\omega \wedge \vartheta$ は $(p+q)-$ 形式である．また，$\omega \wedge \vartheta = (-1)^{pq} \vartheta \wedge \omega$ であることは交代形式に関する対応する命題（=命題 1.2.28）によって明らかである．$\omega \wedge \vartheta$ の可微分性（連続性）については，微分形式の外積の定義および可微分（連続）な共変テンソル場のテンソル積の可微分性（連続性）を用いることによって容易に証明される．

t, X を，それぞれ U 上の共変テンソル場，U 上のベクトル場として，

$$(i(X)t)_P \overset{\text{def}}{=} i(X_P)t_P, \quad \forall P \in U \tag{3.42}$$

で定義される $i(X)t$ をベクトル場 X と共変テンソル場 t の**内部積**という．

t が $\otimes_q[U]$, $S_q[U]$, $A_q[U]$ のいずれかの元であるならば，$i(X)t$ は対応して，それぞれ $\otimes_{q-1}[U]$, $S_{q-1}[U]$, $A_{q-1}[U]$ の元である．また，$t \in \otimes_q[U]$, $X \in \mathfrak{X}[U]$ を，それぞれ (3.33)，(3.27) のように表すと，

$$i(X)t = t_{\mu\nu_1\cdots\nu_{q-1}} \xi^\mu dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_{q-1}} \tag{3.43}$$

である．これから直ちにわかるように，t, X が共に可微分（連続）ならば，$i(X)t$ も可微分（連続）である．

一般に任意の混合テンソル場について，テンソル積，成分，可微分性（連続性）が定義される．また，交代反変テンソル場同士の**外積** $\curlywedge$，および共変ベクトル場と反変テンソル場の**内部積**が共変テンソル場の場合におけるのと同様の方法で定義され，命題 3.5.1，3.5.2，3.5.4，3.5.5 および表示 (3.43) のそれぞれに対応する命題と表示が成り立つ．また，反変部分が交代な混合テンソル場同士の反変部分の外積の演算 $\curlywedge$ も定義され，(1.85) に対応する表式が成り立つ．第 4 章では，電磁場の角運動量密度がこの外積 $\curlywedge$ を用いて定義される．

3.6 計量曲面，絶対微分および演算積

d 次元曲面 Σ の各点 P における接ベクトル空間 $T_P(\Sigma)$ に符号数 $(a, \mathrm{d}-a)$ の計量テンソル $g^{\Sigma}{}_P$ が与えられているものとする．ただし，$(a, \mathrm{d}-a)$ は Σ のすべての点について共通であるものとする．このとき，Σ の各点 P に $g^{\Sigma}{}_P$ を対応させる写像 $g^{\Sigma} : P \to g^{\Sigma}{}_P$ を Σ 上の符号数 $(a, \mathrm{d}-a)$ の**計量テンソル場**（あるいは単に**計量**）という．とくに $(a, \mathrm{d}-a) = (0, \mathrm{d})$ であるときの g^{Σ} および $(a, \mathrm{d}-a) = (1, \mathrm{d}-1)$ であるときの g^{Σ} を，それぞれ **Riemann 計量**，**Lorentz 計量**という．計量の定義された曲面を**計量曲面**という．

計量曲面 Σ において曲線 $\Gamma : (a, b) \to \Sigma$ が与えられており，区間 (a, b) の任意の点 s において反変ベクトル $V(\Gamma(s))$ が与えられているものとする．s に対して $\Gamma(s) \in U$ であるような曲面片 U における局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ をとって，$V(\Gamma(s)) = V^{\mu}(\Gamma(s))(\partial/\partial x^{\mu})_{\Gamma(s)}$ と表して，

$$\frac{DV(\Gamma(s))}{Ds} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left[\frac{dV^{\mu}(\Gamma(s))}{ds} + \left\{ {\mu \atop \rho\ \nu} \right\}\Big(\Gamma(s)\Big)\frac{d\Gamma^{\rho}(s)}{ds}V^{\nu}(\Gamma(s))\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)_{\Gamma(s)} \tag{3.44}$$

とおく．ここに $\Gamma^{\rho}(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} x^{\rho}(\Gamma(s))$ であり，また $\left\{ {\mu \atop \rho\ \nu} \right\}$ は，計量テンソル場の成分 $g_{\mu\nu} \stackrel{\mathrm{def}}{=} g^{\Sigma}(\partial/\partial x^{\mu}, \partial/\partial x^{\nu})$ および行列 $(g_{\mu\nu})$ の逆行列 $(g^{\mu\nu})$ を用いて

$$\left\{ {\mu \atop \rho\ \nu} \right\}\Big(P\Big) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}\left\{g^{\mu\xi}\left(\frac{\partial g_{\xi\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\xi\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\xi}}\right)\right\}\Big(P\Big), \quad \forall P \in U \tag{3.45}$$

と定義される U 上の関数であって，**Christoffel 記号**とよばれる．

$DV(\Gamma(s)/Ds$ は well-defined である．すなわち，$\Gamma(s)$ の近傍における任意の局所座標系 $(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^{\mathrm{d}})$ に対して，$\overline{\Gamma}^{\mu}(s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \bar{x}^{\mu}(\Gamma(s))$, $\overline{V}^{\mu}(\Gamma(s)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} V(\Gamma(s))(\overline{x}^{\mu})$ とおくと (3.44) の右辺は

$$\left[\frac{d\overline{V}^{\mu}(\Gamma(s))}{ds} + \overline{\left\{ {\mu \atop \rho\ \nu} \right\}}\Big(\Gamma(s)\Big)\frac{d\overline{\Gamma}^{\rho}(s)}{ds}\overline{V}^{\nu}(\Gamma(s))\right]\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\mu}}\right)_{\Gamma(s)} \tag{3.46}$$

と一致する．ここに，$\overline{\left\{{\mu \atop \rho\ \nu}\right\}}$ は $\bar{g}_{\mu\nu} \overset{\mathrm{def}}{=} g^{\Sigma}(\partial/\partial\bar{x}^{\mu}, \partial/\partial\bar{x}^{\nu})$ を用いて定義された Christoffel 記号であり，$\left\{{\xi \atop \sigma\ \lambda}\right\}$ とは

$$\overline{\left\{{\mu \atop \rho\ \nu}\right\}} = \frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\xi}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial\bar{x}^{\rho}}\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial\bar{x}^{\nu}}\left\{{\xi \atop \sigma\ \lambda}\right\} + \frac{\partial\bar{x}^{\mu}}{\partial x^{\xi}}\frac{\partial^2 x^{\xi}}{\partial\bar{x}^{\rho}\partial\bar{x}^{\nu}} \tag{3.47}$$

という関係にある．$DV(\Gamma(s))/Ds$ は，Σ の点 $\Gamma(s)$ における接ベクトルである．

とくに，Σ が計量アフィン空間 M である場合，座標枠 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ に関する座標系を $(y^1, \cdots, y^n)$ と表すと，$(\partial/\partial y^{\mu})_P = \vec{e}_{\mu}, \forall P \in M$ であり，また $G_{\mu\nu} \overset{\mathrm{def}}{=} g^{\Sigma}(\vec{e}_{\mu}, \vec{e}_{\nu})$ （$\Sigma = M$）は定数であるから，

$$\frac{DV(\Gamma(s))}{Ds} = \frac{dV(\Gamma(s))}{ds} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{dV^{\mu}(\Gamma(s))}{ds}\vec{e}_{\mu} \tag{3.48}$$

となる．ここに，$V(\Gamma(s)) = V^{\mu}(\Gamma(s))\vec{e}_{\mu}$ と表した．

$DV(\Gamma(s))/Ds$ のことを V の曲線 Γ に沿う**絶対微分**という[16]．これは，第 4 章において質点の**運動量**の時間微分および**加速度**を導入する際に用いられる．なお，(3.9) で定義される Γ の接ベクトル $D\Gamma(s)/Ds$ は，曲面 Σ の計量の存在を前提としていないが，絶対微分 $DV(\Gamma(s))/Ds$ は Σ の計量の存在を前提として定義されていることに注意しよう．さらに，曲線 Γ 上で与えられた任意のテンソル $t(\Gamma(s))$ に対して，その絶対微分が定義されることを付言しておく．

定義 3.6.1. U を計量曲面 Σ の開集合として，

$$(\zeta(t))_P \overset{\mathrm{def}}{=} \zeta(t_P), \quad \forall P \in U, \quad \forall t \in \otimes^q[U] \tag{3.49}$$

によって写像 $\zeta : \otimes^q[U] \to \otimes_q[U]$ を定義する．なお，(3.49) の**右辺における記号** ζ **は** (1.102) **で定義されている写像**を表す．

---

16) (3.44) による $DV(\Gamma(s))/Ds$ の定義は唐突にみえるかもしれない．しかし，$\Sigma = M$ の場合について，簡明な表示 (3.48) から $\partial/\partial x^{\mu} = (\partial y^{\lambda}/\partial x^{\mu})\partial/\partial y^{\lambda}$ と $g_{\mu\nu} = (\partial y^{\lambda}/\partial x^{\mu})(\partial y^{\rho}/\partial x^{\nu})G_{\lambda\rho}$ を用いて (3.44) を導出することにより，この定義の必然性を読みとることができる．また，第 4 章における 3 次元理論の場合の質点の速度，加速度の極座標表示 (4.4) を導く過程も参考になると思う．

(3.49) で定義される ζ は $\otimes^q[U]$ から $\otimes_q[U]$ の上への線型同型写像であり，逆写像 $\kappa \stackrel{\text{def}}{=} \zeta^{-1} : \otimes_q[U] \to \otimes^q[U]$ が定義される[17]．t を局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ を用いて，$t = t^{\mu_1\cdots\mu_q}(\partial/\partial x^{\mu_1}) \otimes \cdots \otimes (\partial/\partial x^{\mu_q})$ と表すと，$\zeta(t) = t_{\mu_1\cdots\mu_q} dx^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_q}$ となる．ここに，$t_{\mu_1\cdots\mu_q} \stackrel{\text{def}}{=} g_{\mu_1\nu_1} \cdots g_{\mu_q\nu_q} t^{\nu_1\cdots\nu_q}$ とおいた．t が可微分（連続）ならば $\zeta(t)$ は可微分（連続）であり，共変テンソル場 s が可微分（連続）ならば $\kappa(s)$ は可微分（連続）である．

定義 3.6.2. $p = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}$ として，Σ の計量曲面 Σ の開集合 U 上の p 階交代反変テンソル場 s と反変ベクトル場 X に対して

$$(X \oslash s)_P \stackrel{\text{def}}{=} X_P \oslash s_P, \quad \forall P \in U \tag{3.50}$$

により $X \oslash s$ を定義して，さらに $s \oslash X \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{p-1} X \oslash s$ とする．なお，(3.50) の右辺における $\oslash$ は定義 1.3.3 で定義されている演算を表す．$X \oslash s$, $s \oslash X$ のことを X と s の**演算積**という．

$X \oslash s$ と $s \oslash X$ は共に U 上の交代反変テンソル場であり，反変ベクトル場 X と共変テンソル場 $\zeta(s)$ の内部積 $i(X)\zeta(s)$ と $X \oslash s = \kappa(i(X)\zeta(s))$ という関係にある．さらに，U 上の p 階交代共変テンソル場（$p-$ 形式）ω と共変ベクトル場 u に対して

$$(u \oslash \omega)_P \stackrel{\text{def}}{=} u_P \oslash \omega_P, \quad \forall P \in U \tag{3.51}$$

とし $\omega \oslash u \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{p-1} u \oslash \omega$ とすることにより，u と ω の演算積 $u \oslash \omega, \omega \oslash u$ を定義する．ただし，$p = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}$ とし，また右辺における $\oslash$ は (1.113) で定義されている演算を表す．明らかに，$\zeta(\vec{X} \oslash s) = \zeta(\vec{X}) \oslash \zeta(s)$, $\kappa(u \oslash \omega) = \kappa(u) \oslash \kappa(\omega)$ であり，また X, s が共に可微分（連続）ならば $X \oslash s, s \oslash X$ は共に可微分（連続）であり，u, ω が共に可微分（連続）ならば $u \oslash \omega, \omega \oslash u$ は共に可微分（連続）である．

命題 1.3.16，1.3.17 に対応する 2 つの命題が成り立つことは明らかであるが，微分形式と共変ベクトル場の場合についてまとめた形で述べておこう：

---

[17] (3.49) において，左辺における ζ と右辺における ζ とは意味が異なることに注意すること．作用する対象に応じて記号の意味を弁別して頂きたい．

命題 3.6.1. $p-$ 形式 ω が共変ベクトル場 u に線型に依存して，かつ $\omega \oslash u = 0 = u \oslash \omega$ が成り立つための必要十分条件は，ω に対応して $(p+1)-$ 形式 $\tilde{\omega}$ が存在して $\omega = \tilde{\omega} \oslash u = (-1)^p u \oslash \tilde{\omega}$ と表されることである．なお，このような $\tilde{\omega}$ は ω に対応して一意的に定まる．ただし $p = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}-1$ とする．

第 4 章において，真空の誘電率，透磁率がこの命題に依拠して共に 3− 形式として導入される．

以下では，とくに断らない場合には，テンソル場，微分形式は可微分であるものとする．

3.7 曲面の向き付けと星印作用素

曲面の向き付け可能性と向きの概念を微分形式を用いて定義する．さらに，向き付けられた計量曲面およびその上の交代テンソル場に対する Hodge の星印作用素を考える．

d 次元曲面 Σ について，Σ 上の連続[18)] な d− 形式 ω であって $\omega_P \neq 0, \forall P \in \Sigma$ であるもの，すなわち Σ 上のどの点においても 0 でないものが存在するとき，Σ は**向き付け可能**であるという．向き付け可能で連結な d 次元曲面 Σ を考える．Σ 上のどの点においても 0 でない連続な d− 形式の全体を $\mathcal{A}_{\mathrm{d}}{}^{\sharp}[\Sigma]$ と表す．$\mathcal{A}_{\mathrm{d}}{}^{\sharp}[\Sigma]$ の任意の 2 元 ω, ϑ を考えると，$\omega = f\vartheta$ なる Σ 上の連続関数で，$f(P) \neq 0, \forall P \in \Sigma$ であるものが存在する．この f は Σ 上至るところで正であるか，Σ 上至るところで負であるかである．前者であるとき，かつそのときに限り，$\omega \simeq \vartheta$ と表す．$\simeq$ は同値関係であって，$\mathcal{A}_{\mathrm{d}}{}^{\sharp}[\Sigma]$ はこの関係によって 2 つの同値類に分割される．この 2 つの同値類のことを **Σ の向き**といい，一方の向きを正の向き，他方を負の向きと定めてあるとき，Σ は向き付けられているといい，正の向きに属する d− 形式を Σ の**体積要素**という．

Σ が n 次元アフィン空間 $\mathcal{M} = \{M; V\}$ の基礎空間 M であるときは，Ω を V 上の 0 でない n 次交代形式として $\omega_P \overset{\mathrm{def}}{=} \Omega, \forall P \in M$ とすると，ω は

18) 可微分性を前提とはしない．

M 上のどの点でも 0 でない $n-$ 形式であり，したがって M は向き付け可能である．とくに，Ω が正の n 次交代形式であるならば，この ω は M の体積要素である．

Σ が連結でない向き付け可能な d 次元曲面である場合，その**連結成分**[19]を，I を添数集合として Σ_a $(a \in I)$ と表し，$\mathcal{A}_{\mathrm{d}}{}^{\sharp}[\Sigma]$ の元 ω の各連結成分 Σ_a への制限を ω_a とおく．この ω_a は Σ_a の上のどの点でも 0 にならない連続な d$-$ 形式であるから，Σ_a は向き付け可能である．各 Σ_a で正の向きを指定して，Σ の正の向きを定める．正の向きを指定された Σ を**向き付けられた曲面**という．Σ 上の d$-$ 形式 ω の Σ_a への制限 ω_a $(a \in I)$ がすべて正の向きに属するとき，ω を Σ の正の d$-$ 形式，あるいは体積要素という．

命題 3.7.1. 向き付け可能な d 次元曲面 Σ 上のどの点でも 0 にならない任意の d$-$ 形式 ω について，この ω が体積要素であるように Σ の向きを定めることができる．

証明： Σ が連結であるときは，$\mathcal{A}_{\mathrm{d}}{}^{\sharp}[\Sigma]$ の同値関係 $\simeq$ による同値類のうち ω を含むものを正の向きと定めればよい．連結でない場合は，各連結成分 Σ_a の向きを ω_a が正の向きに属するように定めればよい．

ω を向き付けられた d 次元曲面 Σ の体積要素とする．点 P における接ベクトル空間 $T_P(\Sigma)$ の向きを ω_P が正の交代形式であるように定める[20]．$(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ を曲面片 S における局所座標系とするとき，S の各点 P における自然基底 $((\partial/\partial x^1)_P, \cdots, (\partial/\partial x^{\mathrm{d}})_P)$ が正の基底，すなわち

$$\omega_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_P, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mathrm{d}}}\right)_P\right) > 0, \quad \forall P \in S \tag{3.52}$$

であるとき，$(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ を**正の局所座標系**といい，(3.52) の左辺の量の値が負であるとき，$(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ を**負の局所座標系** という．

なお，d$-$ 形式 ω の，S における局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ に関する成分 $\{\omega_{1\cdots\mathrm{d}}\}$ は，$\omega_{1\cdots\mathrm{d}}(P) = \omega_P((\partial/\partial x^1)_P, \cdots, (\partial/\partial x^{\mathrm{d}})_P)$, $\forall P \in \Sigma$ で与えられる．S が連結である場合，ω の連続性により，S の 1 点 P において $\omega_{1\cdots\mathrm{d}}(P) >$

---
[19] 付録 **B** の定義 B.16 を参照．
[20] 以下では $T_P(\Sigma)$ はこのように向き付けられているものとする．

0 であれば S の任意の点 Q において $\omega_{1\cdots \mathrm{d}}(Q) > 0$ である．したがって連結な曲面片上における局所座標系は正であるか負であるかのどちらかである．

向き付けられたアフィン空間 $\{M; V_o\}$ における正（負）の座標枠に関する座標系[21] は正（負）の局所座標系の例である．また，向き付けられた計量アフィン空間 $\{M; V_o^{(a,n-a)}\}$ の場合，正の単位 n 次交代形式 ω_V はこの空間の体積要素である．

命題 3.7.2. $S_\alpha \bigcap S_\beta \neq \emptyset$ である曲面片 S_α, S_β について，それぞれにおける局所座標系を $({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^{\mathrm{d}})$, $({x_\beta}^1, \cdots, {x_\beta}^{\mathrm{d}})$ とする．これらが共に同じ向きに属するための必要十分条件は

$$\det\left(\left(\frac{\partial {x_\alpha}^\mu}{\partial {x_\beta}^\nu}\right)_P\right) > 0, \quad \forall P \in S_\alpha \bigcap S_\beta \tag{3.53}$$

が成り立つことである．

証明： 関係式

$$\left.\begin{aligned} &\omega_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial {x_\beta}^1}\right)_P, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial {x_\beta}^{\mathrm{d}}}\right)_P\right) \\ &\quad = \det\left(\left(\frac{\partial {x_\alpha}^\mu}{\partial {x_\beta}^\nu}\right)_P\right)\omega_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial {x_\alpha}^1}\right)_P, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial {x_\alpha}^{\mathrm{d}}}\right)_P\right) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall P \in S_\alpha \bigcap S_\beta \end{aligned}\right\} \tag{3.54}$$

によって明らかである．

向き付けられたアフィン空間 $\{M; V_o\}$ において，2 つの座標枠 $[O; (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)]$, $[O'; (\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n)]$ のそれぞれに関する座標系を考えると，これらについて上記の命題が成り立っていることは命題 2.2.1 から容易にわかる．

命題 3.7.3. 向き付け可能な任意の曲面 Σ について，Σ の座標近傍系 $\{(S_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ であって次の条件を満足するようなものが存在する．
条件：$S_\alpha \bigcap S_\beta \neq \emptyset$ である曲面片 S_α, S_β について，それぞれにおける局所座標系を $({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^{\mathrm{d}})$, $({x_\beta}^1, \cdots, {x_\beta}^{\mathrm{d}})$ とすると，(3.53) が成り立つ．

また逆に，この条件を満足する座標近傍系 $\{(S_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ が存在するならば，曲面 Σ は向き付け可能であってかつ Σ 上の正の d− 形式が存在する．

21） 第 2 章の部分節 **2.2.1** を参照．

証明： 前半は前命題によって明らかである．後半部分の証明については，例えば文献 [11] を参照されたい．

上の命題によれば，向き付け可能な曲面についてはその座標近傍系 $\{(S_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ であって，添数集合 A に属するすべての α に対して (S_α,ψ_α) における局所座標系 $({x_\alpha}^1,\cdots,{x_\alpha}^{\mathrm{d}})$ が正（負）であるものが存在する．このとき，$\{(S_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ と各 (S_α,ψ_α) を，それぞれ**正（負）の座標近傍系**および**正（負）の座標近傍**という．

正（負）の局所座標系が定義されている曲面片を正（負）の曲面片という．

球面は向き付け可能であるが，Möbius の帯は向き付け可能ではない．

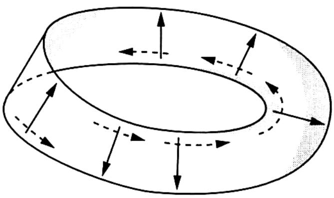


図 **3.2** Möbius の帯

n 次元計量アフィン空間 $\{M;V^{(a,n-a)}\}$ における d 次元曲面 Σ の各点 P に法ベクトル空間 $N_P(\Sigma)$ の元を対応させる対応を**法ベクトル場**という．法ベクトル場は Σ 上のベクトル場の一種であるから，その連続性，可微分性は定義 3.4.1 によって定義される．

命題 3.7.4. 計量 g をもつ n 次元計量アフィン空間 $\{M;V^{(a,n-a)}\}$ における $n-1$ 次元曲面（すなわち超曲面）Σ が向き付け可能であるための必要十分条件は，Σ 上のどの点でも 0 にならない連続な法ベクトル場が存在することである．

証明: Σ の点 P における接ベクトル空間 $T_P(\Sigma)$ の線型独立なベクトル $v_1,\cdots,v_{n-1}$, 線型空間 $V^{(a,n-a)}$ の基底 $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$，および

$$\omega_P(v_1,\cdots,v_{n-1})\zeta(\vec{e}_1)\wedge\cdots\wedge\zeta(\vec{e}_n)=\zeta(v_1)\wedge\cdots\wedge\zeta(v_{n-1})\wedge\zeta(N_P) \quad (3.55)$$

を満足する $(n-1)-$ 形式 ω と法ベクトル場 N を考える．ここに ζ は (1.100) で定義された $V^{(a,n-a)}$ から $(V^{(a,n-a)})^*$ への写像とする．また，両辺における外積の演

算は $(V^{(a,n-a)})^*$ のベクトルの外積を意味する．接ベクトル空間 $T_P(\Sigma)$ と法ベクトル空間 $N_P(\Sigma)$ の次元数はそれぞれ $n-1, 1$ であり，$\{v_1, \cdots, v_{n-1}, N_P\}$ は線型独立であるから，連続な法ベクトル場 N と連続な $(n-1)-$ 形式 ω が (3.55) を通じて 1 対 1 に対応することは明らかである．したがって，Σ 上の連続な $(n-1)-$ 形式で Σ 上のどの点においても 0 でないものが存在するための必要十分条件は Σ 上の連続な法ベクトル場で Σ のどの点においても 0 でないものが存在することである．よって，命題が成り立つ．

ここで，空間的超曲面の概念を導入しておこう．これは，相対論的場の理論で重要な役割を果たしており，本書の第 4 章でも空間的超曲面上の電気量，電磁場のエネルギー運動量および 4 次元角運動量を考えることになる．

定義 3.7.1. $n+1$ 次元 Minkowski 空間 $\{M; V^{(1,n)}\}$ における n 次元超曲面 Σ について，Σ 上で定義された連続な法ベクトル場 N で $g_P(N_P, N_P) < 0, \forall P \in \Sigma$ を満足するものが存在するとき，Σ を**空間的超曲面**という．

空間的超曲面の任意の点 P において，N_P は時間的ベクトルである．命題 3.7.4 により，**空間的超曲面は向き付け可能である**．第 2 章の部分節 **2.2.3** で述べた，慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ での任意の時刻 $t = X^0/c$ における空間 $M(X^0)$ は空間的超曲面の一種である．

向き付けられた計量曲面において，微分形式に対する **Hodge の星印作用素**を定義しよう．Σ を計量 g^Σ をもつ向き付けられた d 次元曲面，ω を Σ 上の微分形式とする．このとき，

$$(\star\omega)_P \stackrel{\mathrm{def}}{=} \star(\omega_P), \quad \forall P \in \Sigma \tag{3.56}$$

により $\star\omega$ を定義する．$\star\omega$ を微分形式 ω の**共役**という．なお，上式の右辺は交代形式 ω_P の共役を表す[22]．

線型空間上の交代形式についての命題 1.3.21，1.3.22 から容易に示されるように，ω が $q-$ 形式（$q \leq \mathrm{d}$）であるならば $\star\omega$ は $(\mathrm{d}-q)-$ 形式であり，ω_1, ω_2 を共に $q-$ 形式，a, b を実数とすると，

$$\star(a\omega_1 + b\omega_2) = a \star \omega_1 + b \star \omega_2 \tag{3.57}$$

22）線型空間の場合の $\hat{\star}$ に対応する星印作用素も同様にして定義される．

である．また，$(x^1,\cdots,x^{\mathrm{d}})$ を正の局所座標系とすると

$$\left.\begin{aligned}&\star 1=\det(e^k{}_\mu)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{\mathrm{d}}\\&\star(dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_q})\\&\quad=\frac{1}{(\mathrm{d}-q)\,!}\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\cdots\nu_{\mathrm{d}-q}}dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_{\mathrm{d}-q}}\\&\star(dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_{\mathrm{d}}})=\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{\mathrm{d}}}\end{aligned}\right\}\tag{3.58}$$

である．ここに $q=1,2,\cdots,\mathrm{d}-1$, $\mu_1,\cdots,\mu_d,\nu_1,\cdots,\nu_{\mathrm{d}-q}=1,2,\cdots,\mathrm{d}$ とし，Σ の各点 P に $T_P(\Sigma)$ の正の正規直交基底 $(E_1(P),\cdots,E_{\mathrm{d}}(P))$ とその双対基底 $(E^1(P),\cdots,E^{\mathrm{d}}(P))$ のベクトルを対応させる反変ベクトル場 $E_k:P\to E_k(P)$，共変ベクトル場 $E^k:P\to E^k(P)$ $(k=1,2,\cdots,\mathrm{d})$ を考えて，

$$E_k=e^\mu{}_k\frac{\partial}{\partial x^\mu},\quad E^k=e^k{}_\mu dx^\mu\qquad(k,\mu=1,2,\cdots,\mathrm{d})\tag{3.59}$$

と表し，

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_q}{}_{\nu_1\cdots\nu_{\mathrm{d}-q}}\overset{\mathrm{def}}{=}e^{\mu_1}{}_{i_1}\cdots e^{\mu_q}{}_{i_q}e^{j_1}{}_{\nu_1}\cdots e^{j_{\mathrm{d}-q}}{}_{\nu_{\mathrm{d}-q}}\varepsilon^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_{\mathrm{d}-q}}\\&\qquad\qquad\qquad\qquad(q=1,2,\cdots,\mathrm{d}-1)\\&\varepsilon^{\mu_1\cdots\mu_{\mathrm{d}}}\overset{\mathrm{def}}{=}e^{\mu_1}{}_{i_1}\cdots e^{\mu_d}{}_{i_d}\varepsilon^{i_1\cdots i_{\mathrm{d}}}\end{aligned}\right\}\tag{3.60}$$

としている．なお，$\varepsilon^{i_1\cdots i_q}{}_{j_1\cdots j_{\mathrm{d}-q}}$ の定義については，命題 1.3.22 を参照されたい．

上で導入した $e^k{}_\mu, e^\mu{}_k$ について，次式が成り立つ：

$$e^k{}_\mu e^\mu{}_l=\delta^k{}_l,\quad e^\mu{}_k e^k{}_\nu=\delta^\mu{}_\nu,\quad g_{\mu\nu}=e^k{}_\mu\eta_{kl}e^l{}_\nu,\quad g^{\mu\nu}=e^\mu{}_k\eta^{kl}e^\nu{}_l\tag{3.61}$$

ただし，$g_{\mu\nu}\overset{\mathrm{def}}{=}g^\Sigma(\partial/\partial x^\mu,\partial/\partial x^\nu)$ であり，また $(g^{\mu\nu})$ は行列 $(g_{\mu\nu})$ の逆行列である．

(3.58) を用いて容易に示されるように，ω が可微分（連続）であれば $\star\omega$ も可微分（連続）である．また，命題 1.3.23 から導かれるように，Σ を符号数 $(a,\mathrm{d}-a)$ の計量の定義された向き付けられた曲面とすると，$q-$ 形式 ω に対して

$$\star(\star\omega)=(-1)^{a+q(\mathrm{d}-q)}\omega\tag{3.62}$$

が成り立つ.

ここで**微分形式の内積**を定義しよう．Σ を向き付けられた d− 次元計量曲面とする.

$$\left.\begin{aligned} (K_q(\omega,\vartheta))_P &\stackrel{\text{def}}{=} G_q(\omega_P,\vartheta_P) = \frac{1}{q\,!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}(P)\vartheta^{\mu_1\cdots\mu_q}(P) \\ \forall\omega &= \frac{1}{q\,!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_q}\in A_q[\Sigma] \\ \forall\vartheta &= \frac{1}{q\,!}\vartheta_{\mu_1\cdots\mu_q}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_q}\in A_q[\Sigma] \\ &\forall P\in\Sigma \quad (q=0,1,\cdots,\mathrm{d}) \end{aligned}\right\} \tag{3.63}$$

によって，線型空間 $A_q[\Sigma]$ における内積 K_q を定義する．ただし，G_q は (1.126) におけるものであり，また $\vartheta^{\mu_1\cdots\mu_q} \stackrel{\text{def}}{=} g^{\mu_1\nu_1}\cdots g^{\mu_q\nu_q}\vartheta_{\nu_1\cdots\nu_q}$ とした. $K_q(\omega,\vartheta)$ は Σ 上のスカラー場であり，ω,ϑ が共に可微分（連続）であれば, $K_q(\omega,\vartheta)$ も可微分（連続）である.

Σ を計量 g^{Σ} をもつ向き付けられた d 次元曲面とする．P を Σ の任意の点として,

$$(g^{\Sigma}{}_P)^*(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} g^{\Sigma}{}_P(\kappa(u),\kappa(v)), \quad \forall u,v\in(T_P(\Sigma))^* \tag{3.64}$$

により接ベクトル空間 $T_P(\Sigma)$ の双対空間 $(T_P(\Sigma))^*$ に計量テンソル $(g^{\Sigma}{}_P)^*$ を定義する．(1.105) と命題 1.3.15 からわかるように，g^{Σ} が符号数 $(a,n-a)$ の計量テンソル場ならば $(g^{\Sigma}{}_P)^*$ は線型空間 $(T_P(\Sigma))^*$ の符号数 $(a,n-a)$ の計量テンソルである．さらに，$T_P(\Sigma)$ の正 (負) の基底の双対基底は $(T_P(\Sigma))^*$ の正 (負) の基底になるように $(T_P(\Sigma))^*$ の向きを指定する. すなわち，$(T_P(\Sigma))^*$ は $g^{\Sigma}{}_P$ に同伴する計量をもち，かつ $T_P(\Sigma)$ の向きに同伴する向き付けがなされているものとする．このとき，Σ 上の交代反変テンソル場 t について，交代反変テンソル t_P の共役 $*(t_P)$ が第 1 章の部分節 **1.3.4** において述べた仕方で定義されることになる．この $*(t_P)$ を用いて

$$(*t)_P \stackrel{\text{def}}{=} *(t_P), \quad \forall P\in\Sigma \tag{3.65}$$

とすることにより，t の共役 $*t$ および交代反変テンソル場に対する **Hodge**

の星印作用素 $*$ を定義する．このとき，次式が成り立つ：

$$*t = \kappa(\star\zeta(t)), \quad \zeta(*t) = \star\zeta(t) \tag{3.66}$$

命題 1.3.25 を用いて容易に示されるように，(3.50)，(3.51) で定義された演算積 $X \oslash s$，$u \oslash \omega$ に対して次式が成り立つ：

$$\left.\begin{aligned} X \oslash s &= (-1)^{a+p(\mathrm{d}-p)} * \{(*s) \curlywedge X\} \\ u \oslash \omega &= (-1)^{a+p(\mathrm{d}-p)} \star \{(\star\omega) \wedge u\} \end{aligned}\right\} \tag{3.67}$$

また，2 つの p 階交代反変 q 階交代共変テンソル場 s, t 同士の内積としてのスカラー場 $K^p{}_q(s,t)$ も定義され，s, t が可微分（連続）ならば $K^p{}_q(s,t)$ も可微分（連続）となる．

3.8 微分形式の外微分

微分形式の外微分の演算 d について述べる．**3.12** 節でみるように，3 次元 Euclid 空間のベクトル解析に現れる，勾配，発散，回転，ラプラシアン等はすべて演算 d と Hodge の星印作用素を用いて表現される．

ω を曲面 Σ 上の $q-$ 形式とし，これを Σ の曲面片 S 上で (3.40) と表したとき

$$d\omega \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{q\,!} d\omega_{\mu_1 \cdots \mu_q} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q} \tag{3.68}$$

によって $d\omega$ を定義して，これを ω の**外微分**という．ここに $d\omega_{\mu_1 \cdots \mu_q}$ は，$\omega_{\mu_1 \cdots \mu_q}$ を局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ が定義されている曲面片上の実数値関数と見なして，命題 3.5.3 における仕方で定義された 1− 形式を表す．定義 (3.68) は局所座標系による表示に依拠しているが[23]，次の命題は $d\omega$ が well-defined であることを保証する：

命題 3.8.1. 外微分の上の定義は局所座標系のとり方に依存しない．すなわち，$S \cap S' \neq \emptyset$ であるような任意の曲面片 S, S' に対して，以下のことが成

[23] 外微分の局所座標系に依拠しない定義については，例えば文献 [11] を参照．なお，本書では扱わないが，「交代反変テンソル場の外微分」も定義可能である．

り立つ： S, S' における局所座標系を，それぞれ $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$, $(x'^1, \cdots, x'^{\mathrm{d}})$ として，ω の各々による表示を (3.40) および

$$\omega = \frac{1}{q\,!}{\omega'}_{\mu_1\cdots\mu_q} dx'^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx'^{\mu_q} \tag{3.69}$$

とすると，

$$\frac{1}{q\,!} d\omega_{\mu_1\cdots\mu_q} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q} = \frac{1}{q\,!} d{\omega'}_{\mu_1\cdots\mu_q} \wedge dx'^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx'^{\mu_q} \tag{3.70}$$

である．

証明： ${\omega'}_{\mu_1\cdots\mu_q}$ は S' 上の可微分関数であるから，

$$\begin{aligned} d{\omega'}_{\mu_1\cdots\mu_q} &= \frac{\partial {\omega'}_{\mu_1\cdots\mu_q}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\nu} \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\lambda_q}}{\partial x'^{\mu_q}} \omega_{\lambda_1\cdots\lambda_q} \right) dx'^{\nu} \end{aligned} \tag{3.71}$$

である．したがって

$$\begin{aligned} & d{\omega'}_{\mu_1\cdots\mu_q} \wedge dx'^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx'^{\mu_q} \\ &\quad = \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\lambda_q}}{\partial x'^{\mu_q}} \omega_{\lambda_1\cdots\lambda_q} \right) dx'^{\nu} \wedge dx'^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx'^{\mu_q} \end{aligned} \tag{3.72}$$

である．上式の右辺において，因子

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\lambda_q}}{\partial x'^{\mu_q}} \omega_{\lambda_1\cdots\lambda_q} \right) \tag{3.73}$$

には，例えば

$$\frac{\partial^2 x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\lambda_2}}{\partial x'^{\mu_2}} \cdots \frac{\partial x^{\lambda_q}}{\partial x'^{\mu_q}} \omega_{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_q} \tag{3.74}$$

という項が含まれている．しかし，この項は

$$\frac{\partial^2 x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu_1}} = \frac{\partial^2 x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\mu_1} \partial x'^{\nu}} \tag{3.75}$$

であることと $dx'^{\nu} \wedge dx'^{\mu_1} = -dx'^{\mu_1} \wedge dx'^{\nu}$ であることにより，(3.72) の右辺には寄与しない．他の 同様な項も寄与しないことが容易にわかる．かくて (3.72) の右辺は

$$\frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{\lambda_q}}{\partial x'^{\mu_q}} \frac{\partial \omega_{\lambda_1 \cdots \lambda_q}}{\partial x'^{\nu}} dx'^{\nu} \wedge dx'^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx'^{\mu_q} \\ = \frac{\partial \omega_{\mu_1 \cdots \mu_q}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q} \tag{3.76}$$

となる．なお，最後の部分では

$$\frac{\partial \omega_{\lambda_1 \cdots \lambda_q}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \omega_{\lambda_1 \cdots \lambda_q}}{\partial x^{\lambda}}, \qquad dx'^{\nu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\rho}} dx^{\rho} \tag{3.77}$$

等を用いた．本命題が成り立つことは，もはや明らかであろう．

外微分の定義と前命題により明らかなように，$q-$ 形式 ω の外微分 $d\omega$ は $(q+1)-$ 形式であり，また ω, ϑ を共に $q-$ 形式，a, b を任意の実数とすると

$$d(a\omega + b\vartheta) = ad\omega + bd\vartheta \tag{3.78}$$

である．

命題 3.8.2. ω を $q-$ 形式，ϑ を微分形式とすると

$$d(\omega \wedge \vartheta) = d\omega \wedge \vartheta + (-1)^q \omega \wedge d\vartheta \tag{3.79}$$

である．

命題 3.8.3. 曲面 Σ 上の任意の微分形式 ω に対して

$$d^2\omega \overset{\text{def}}{=} d(d\omega) = 0 \tag{3.80}$$

である．

証明： $0-$ 形式 f に対して，

$$d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} dx^{\nu} \wedge dx^{\mu} \tag{3.81}$$

である．ここで，$\partial^2 f/\partial x^{\nu} \partial x^{\mu} = \partial^2 f/\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}$ と $dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = -dx^{\nu} \wedge dx^{\mu}$ を用いると，$d^2 f = 0$ であることがわかる．すなわち，$0-$ 形式については (3.80) が成

り立つ．$q \geq 1$ として $q-$ 形式 ω を (3.40) のように表すと，x^μ $(\mu = 1, 2, \cdots, q)$ はそれが定義されている開集合上の 0− 形式であることによって $d^2 x^\mu = 0$ であること，および (3.78) と命題 3.8.2 によって

$$
\begin{aligned}
d^2\omega &= d\left(\frac{1}{q\,!} d\omega_{\mu_1\cdots\mu_q} \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q}\right) \\
&= \frac{1}{q\,!} d\left(\frac{\partial \omega_{\mu_1\cdots\mu_q}}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q}\right) \\
&= \frac{1}{q\,!} \frac{\partial^2 \omega_{\mu_1\cdots\mu_q}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} dx^\lambda \wedge dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_q}
\end{aligned}
\tag{3.82}
$$

である．0− 形式 f の場合についての議論から容易にわかるように

$$
\frac{\partial^2 \omega_{\mu_1\cdots\mu_q}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} dx^\lambda \wedge dx^\nu = 0 \tag{3.83}
$$

であるから，結局 $d^2\omega = 0$ が得られ，命題が成り立つことがわかる．

1 点に滑らかに収縮可能な曲面[24] 上の微分形式に対して，命題 3.8.3 の逆命題が成り立つ：

命題 3.8.4. （**Poincaré の補題**）1 点に滑らかに収縮可能な曲面上の $q-$ 形式 ω が $d\omega = 0$ を満足するならば，$\omega = d\vartheta$ を満足する M 上の $(q-1)-$ 形式 ϑ が存在する．ただし，$q \geq 1$ とする．

証明については，アフィン空間の場合については文献 [4, 5, 11] 等で，一般的な場合については,「1 点に滑らかに収縮可能な曲面」の定義を含め，文献 [10] で見ることができる．

d 次元曲面 Σ 上の**任意の d− 形式** ω について，$d\omega = 0$ である．上の命題によれば，Σ が 1 点に滑らかに収縮可能であるならば，この ω に対して，$\omega = d\vartheta$ であるような，$(\mathrm{d}-1)-$ 形式 ϑ が存在することになる．

定義 3.8.1. ω を，符号数 $(a, \mathrm{d}-a)$ の計量をもつ，向き付けられた d 次元計量曲面 Σ 上の任意の $q-$ 形式とする．

$$
\Delta\omega \stackrel{\mathrm{def}}{=} (-1)^{(\mathrm{d}-q)(q-1)+a}\{d \star d \star \omega + (-1)^{\mathrm{d}} \star d \star d\omega\} \tag{3.84}
$$

24) アフィン空間は「1 点に滑らかに収縮可能な曲面」である．

により Δ を定義して，これを**ラプラシアン**（**Laplacian**）という．ただし，$q = 0, 1, \cdots, \mathrm{d}$ とする[25]．

この定義が意味をもっていることは，(3.84) の右辺の中括弧内の 2 項が共に $q-$ 形式であることによって保証されている．ラプラシアンは Σ の向き付けに依存しない．

3.9 共変テンソル場の引き戻し

φ を曲面 Σ から曲面 Ξ への写像とし，t を曲面 Ξ 上の q 階共変テンソル場とする．このとき，

$$\left.\begin{array}{l} (\varphi^*t)(P) \overset{\text{def}}{=} t(\varphi(P)) \quad (\ \forall P \in \Sigma, \quad q = 0 \text{ のとき }) \\ (\varphi^*t)_P(v_1, \cdots, v_q) \overset{\text{def}}{=} t_{\varphi(P)}((\varphi_*)_P v_1, \cdots, (\varphi_*)_P v_q) \\ (\ \forall P \in \Sigma, \quad \forall v_i \in T_P(\Sigma), \quad q \geq 1 \text{ のとき } \quad (i = 1,2,\cdots,q)\ ) \end{array}\right\} \tag{3.85}$$

で定義される φ^*t を t の φ による Σ への**引き戻し**という．

命題 3.9.1. φ^*t は，Σ 上の q 階共変テンソル場である．t, φ が共に可微分（連続）ならば，φ^*t も可微分（連続）である．

証明：$(\varphi_*)_P$ が線型写像であることと t が Ξ 上の q 階共変テンソル場であることにより，その可微分性（連続性）は別として，φ^*t が Σ 上の q 階共変テンソル場であることは明らかである．可微分性（連続性）を示そう．Σ, Ξ の次元数をそれぞれ d, d' とする．P を Σ の任意の点として，$(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ を P の近傍における局所座標系，$(y^1, \cdots, y^{\mathrm{d}'})$ を Ξ の点 $Q \overset{\text{def}}{=} \varphi(P)$ の近傍における局所座標系とする．(3.33) にならって

$$\left.\begin{array}{r} t = t_{\alpha_1 \cdots \alpha_q} dy^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes dy^{\alpha_q} \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_q = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}') \end{array}\right\} \tag{3.86}$$

---

25) イタリック体の記号 d は外微分の演算を表す．これをローマン体の記号 d と混同しないように．くどいようであるが念のため．

$$\left.\begin{aligned} \varphi^* t = (\varphi^* t)_{\mu_1 \cdots \mu_q} dx^{\mu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\mu_q} \\ (\mu_1, \cdots, \mu_q = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}) \end{aligned}\right\} \tag{3.87}$$

と表すと，

$$\left((\varphi^* t)_{\mu_1 \cdots \mu_q}\right)(P) = t_{\alpha_1 \cdots \alpha_q}(Q) \left(\frac{\partial \Phi^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial \Phi^{\alpha_q}}{\partial x^{\mu_q}}\right)(P) \tag{3.88}$$

が得られる．ここに (3.20) を用いた．したがって

$$(\varphi^* t)_{\mu_1 \cdots \mu_q} = (t_{\alpha_1 \cdots \alpha_q} \circ \varphi) \left(\frac{\partial \Phi^{\alpha_1}}{\partial x^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial \Phi^{\alpha_q}}{\partial x^{\mu_q}}\right) \tag{3.89}$$

である．t, φ が共に可微分（連続）であればこの式の右辺は Σ 上で可微分（連続）であり，したがって $\varphi^* t$ が Σ 上で可微分（連続）であることは明らかである．かくて命題が成り立つことがわかった．

命題 3.9.2. 以下の関係が成り立つ：

$$\varphi^*(as + bt) = a(\varphi^* s) + b(\varphi^* t) \tag{3.90}$$

$$\varphi^*(s \otimes t) = (\varphi^* s) \otimes (\varphi^* t) \tag{3.91}$$

$$\varphi^*(\omega \wedge \vartheta) = (\varphi^* \omega) \wedge (\varphi^* \vartheta) \tag{3.92}$$

$$d(\varphi^* \omega) = \varphi^* d\omega \tag{3.93}$$

$$(\varphi \circ \psi)^* t = \psi^*(\varphi^* t) \tag{3.94}$$

ただし，a, b は実数，s, t は共に曲面 Ξ 上の共変テンソル場，ω, ϑ は共に Ξ 上の微分形式であり，(3.90) においては s, t の階数は同一とする．ψ は曲面 Π から曲面 Σ への写像，φ は Σ から Ξ への写像とする．

3.10 微分形式の積分

向き付けられた d 次元曲面 Σ 上の d− 形式については，その積分が定義される．これは，大学初年級で学ぶ積分を一般化したものであるが，その定義，諸命題とその証明を正確に述べるには，相当量の準備が要る．本書では，議論の輪郭を述べるに留める．命題 3.10.1，3.10.4 および 3.10.5 の証明等については，多様体論の本（文献 [8]〜[11] 等）を見て頂きたい．

積分に関しては，本節で述べることを"感覚的に理解"しておけば，第4章以降を読むには大きな支障はないものと思う．

積分を考えるためには何らかの積分変数をとる必要がある．初等微分積分学はアフィン空間の一種である Euclid 空間の上で展開される場合がほとんどである．アフィン空間は1つの座標近傍で覆われるので，積分の定義も，これに対応する局所座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ を用いて行えばよく，また積分の定義が座標近傍のとり方によらないことも容易に示される．しかし，一般の曲面上での積分を考えようとすると事態は少々厄介である．曲面は，1つの座標近傍で覆われているとは限らないからである．そこで，「積分領域 D を1つの座標近傍に含まれる小領域に分割して，各小領域では普通のように積分を定義して，それらを足しあげる」という道筋で D 上の積分を定義しよう．

3.10.1　1の分割

準備として，まず1の分割について述べておく[26]．

曲面 Σ 上の関数 F について，Σ の部分集合 $\{P \in \Sigma | F(P) \neq 0\}$ の**閉包** $\overline{\{P \in \Sigma | F(P) \neq 0\}}$ を F の**台**といい，$\mathrm{supp}(F)$ と表す．$\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を曲面 Σ の**開被覆**とする．下記の条件 **[PU1]**〜**[PU4]** をすべて満足する Σ 上の C^∞ 関数 f_α $(\alpha \in A)$ 全体の集合 $\{f_\alpha | \alpha \in A\}$ を開被覆 $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に従属する**1の分割**という[27]：**[PU1]** $0 \leq f_\alpha(P) \leq 1, \forall P \in \Sigma$ である．**[PU2]** $\mathrm{supp}(f_\alpha) \subset O_\alpha, \forall \alpha \in A$ である．**[PU3]** $\{\mathrm{supp}(f_\alpha) | \alpha \in A\}$ は**局所有限**である．**[PU4]** $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha = 1$ である．

命題 3.10.1. 曲面 Σ の任意の開被覆 $\mathfrak{O} = \{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ について，それに従属する1の分割が存在する．

---

26) この部分節では，位相空間についての知識を多用する．位相空間の基礎事項については付録 **B** の **B.4** 節を参照．

27) 局所有限の定義（付録 **B** の部分節 **B.4.4** を参照）と条件 **[PU3]** により，Σ 上の任意の点 P に対してその十分小さい近傍 U が存在して，$U \cap \mathrm{supp}(f_\alpha) \neq \emptyset$ であるような α は有限個しかない．したがって，**[PU4]** における和 $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha$ は各点の十分小さい近傍上で有限和である．

3.10.2 曲面上の積分と Stokes の定理

Σ を向き付けられた d 次元曲面とする．$\{(S_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ を Σ の正の座標近傍系とし，(S_α, ψ_α) における局所座標系を $({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^{\rm d})$ と表す．これは正の局所座標系である．また，$\phi_\alpha \stackrel{\rm def}{=} (\psi_\alpha)^{-1}$ とおく．まず，アフィン空間における有界部分集合を定義しよう．アフィン空間 M の部分集合 N について，$\|\overrightarrow{OP}\| < r, \forall P \in N$ であるような正数 r が存在するとき，N は M の**有界部分集合**であるという．なお，ここでアフィン空間 M の座標枠 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ をとり，P を $P = O + x^\mu(P)\vec{e}_\mu$ と表して，$\|\overrightarrow{OP}\| \stackrel{\rm def}{=} {\rm Max}_{\mu=1,2,\cdots,n}|x^\mu(P)|$ とした．容易に示されるように，N が有界部分集合であるか否かは座標枠 $[O; \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}]$ の選び方によらない．M における曲面 Σ の部分集合 D が M の有界部分集合であるとき，D は Σ の有界部分集合であるという．

また，$\psi_\alpha(V_\alpha) = \{({u_\alpha}^1, \cdots, {u_\alpha}^{\rm d}) | -a < {u_\alpha}^\mu < a,\ \mu = 1, 2, \cdots, {\rm d}\}$ と表される S_α の部分集合 V_α を**立方体領域**という[28)]．ここに a は十分小さな正数であって $V_\alpha \subset S_\alpha$ であるようなものとする．

D が曲面 Σ の有界 d 次元部分曲面（=有界部分集合でかつ d 次元の部分曲面）であるとき，Σ 上の d− 形式 ω の D 上の積分を定義しよう．まず ${\rm supp}(\omega) \stackrel{\rm def}{=} \overline{\{P \in \Sigma | \omega_P \neq 0\}}$ が十分に小さくて，ある α に対して ${\rm supp}(\omega) \subset V_\alpha \subset S_\alpha$ となっている場合を考える．ω は S_α 上では Ω_α を S_α 上の関数として，$\omega = \Omega_\alpha d{x_\alpha}^1 \wedge \cdots \wedge d{x_\alpha}^{\rm d}$ と表される[29)]．このとき，${u_\alpha}^\mu \stackrel{\rm def}{=} {\phi_\alpha}^* {x_\alpha}^\mu$ $(\mu = 1, 2, \cdots, {\rm d})$ として，

$$\int_D \omega \stackrel{\rm def}{=} \int \cdots \int_{\psi_\alpha(D\cap V_\alpha)} ({\phi_\alpha}^* \Omega_\alpha)\, d{u_\alpha}^1 \cdots d{u_\alpha}^{\rm d}$$

$$\stackrel{\rm def}{=} \int_{-a}^{a} \cdots \int_{-a}^{a} ({\phi_\alpha}^* \Omega_\alpha)\, d{u_\alpha}^1 \cdots d{u_\alpha}^{\rm d} \qquad (3.95)$$

とおく．ただし，この式の最後の部分における積分は $R^{\rm d}$ における通例の d 重積分を表す．

---

28) 立方体領域といっても，日常目にするサイコロ状の形をしていることを意味しない．

29) ω は d− 形式であるから，d 個の添数 $\mu, \nu, \lambda, \cdots, \rho$ をもち，これらについて交代な関数 $(\omega_\alpha)_{\mu\nu\lambda\cdots\rho}$ を用いて，$\omega = (1/{\rm d}!)(\omega_\alpha)_{\mu\nu\lambda\cdots\rho} d{x_\alpha}^\mu \wedge d{x_\alpha}^\nu \wedge d{x_\alpha}^\lambda \wedge \cdots \wedge d{x_\alpha}^\rho = (\omega_\alpha)_{1\cdots {\rm d}} d{x_\alpha}^1 \wedge \cdots \wedge d{x_\alpha}^{\rm d}$ と表される．そこで $\Omega_\alpha \stackrel{\rm def}{=} (\omega_\alpha)_{1\cdots{\rm d}}$ とおいたのである．

命題 3.10.2. (3.95) で定義される $\int_D \omega$ は well-defined である．すなわち，この式の右辺は $\mathrm{supp}(\omega)$ を含む立方体領域のとり方に依存しない有限確定値である．

上の命題により，ある α に対して $\mathrm{supp}(\omega) \subset V_\alpha \subset S_\alpha$ である場合について，**ω の D 上の積分** $\int_D \omega$ が (3.95) によって定義されることがわかった．

次に，$\mathrm{supp}(\omega)$ が必ずしも小さくない場合について考える．D は有界であるから，アフィン空間 M の**コンパクト**な部分集合 K' であって，D を含むものが存在する[30]．そこで $K \overset{\mathrm{def}}{=} \Sigma \cap K'$ とおくと，K は Σ のコンパクトな部分集合であって $D \subset K$ である．Σ の各点はある座標近傍に対応する立方体領域に含まれるから，Σ（したがって K）はこのような立方体領域の族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で**被覆**される．

ところで，K はコンパクトであるから，この族に属する有限個の立方体領域の族で被覆される．これらの立方体領域を $V_{\alpha_1}, \cdots, V_{\alpha_m} \quad (\alpha_i \in A, i = 1, 2, \cdots, m)$ とする．$D \subset K$ であるから $D \subset \bigcup_{i=1}^m V_{\alpha_i}$ である．Σ の開被覆 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に従属する 1 の分割を $\{f_\alpha | \alpha \in A\}$ とする．$(\omega_\alpha)_P \overset{\mathrm{def}}{=} f_\alpha(P)\omega_P, \forall P \in \Sigma$ によって定義される Σ 上の d− 形式 ω_α を考えると，1 の分割の定義からわかるように，$\mathrm{supp}(\omega_\alpha) \subset \mathrm{supp}(f_\alpha) \subset V_\alpha$ である．したがって各 ω_α について (3.95) の仕方で積分 $\int_D \omega_\alpha$ が定義される．1 の分割の定義における [**PU4**] と $D \subset \bigcup_{i=1}^m V_{\alpha_i}$ であることによって，D 上では $\omega = \sum_{i=1}^m \omega_{\alpha_i}$ である．そこで，ω の D 上の積分 $\int_D \omega$ を次式で定義する：

$$\int_D \omega \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} \int_D \omega_{\alpha_i} \tag{3.96}$$

命題 3.10.3. (3.96) で定義される積分は well-defined である．すなわち，この式の右辺は，Σ を被覆する立方体領域の族のとり方にも，それに従属する 1 の分割にも依存しない有限確定値である．

任意の実数 a, b，任意の d− 形式 ω, ϑ について次の公式が成り立つ：

$$\int_D (a\omega + b\vartheta) = a \int_D \omega + b \int_D \vartheta \tag{3.97}$$

---

[30] 付録 B の部分節 B.4.4 を参照.

また，D_1, D_2 は共に Σ の有界 d 次元部分曲面で，$D_1 \cap D_2 = \emptyset$ とする．このとき，

$$\int_{D_1 \cup D_2} \omega = \int_{D_1} \omega + \int_{D_2} \omega \tag{3.98}$$

である．

$\mathrm{c} < \mathrm{d}$ の場合の Σ 上の c− 形式 ϑ については，向き付けられた c 次元部分曲面 Π の有界部分曲面 C 上の積分が定義される．すなわち，$\imath$ を Π から Σ への包含写像とすると $\imath^*\vartheta$ は Π 上の c− 形式であるが，これに対して積分 $\int_C \imath^*\vartheta$ が定義されることとなる．

d 次元曲面 Σ の領域（=連結な開集合）D が次の条件を満足するとき，D を**滑らかな境界 ∂D をもつ領域**という．条件：D の境界点の集合を ∂D とするとき，∂D の各点 P に対して Σ における P の近傍 U と U における局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ が存在して $D \cap \overline{U} = \{Q \in U | x^{\mathrm{d}}(Q) \geq x^{\mathrm{d}}(P)\}$ である．

命題 3.10.4. D を d 次元曲面の滑らかな境界 ∂D をもつ領域とする．∂D は Σ の $\mathrm{d}-1$ 次元閉部分曲面（= **閉集合**でありかつ部分曲面）であって Σ が向き付け可能ならば，∂D も向き付け可能である．

$S_\alpha \cap \partial D \neq \emptyset$ なる S_α について，$({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^{\mathrm{d}})$ は S_α における正の局所座標系であるが，このとき，d が偶数（奇数）の場合は $({x_\alpha}^1, \cdots, {x_\alpha}^{\mathrm{d}-1})$ が $S_\alpha \cap \partial D$ における正（負）の局所座標系であるように ∂D の向きを定め，これを Σ の向きに**誘導された ∂D の向き**とよぶ．

命題 3.10.5. （**Stokes の定理**）Σ を向き付けられた d 次元曲面とし，D を Σ の滑らかな境界 ∂D をもつ有界領域（= 有界な領域）とする．このとき，Σ 上の $(\mathrm{d}-1)$− 形式 ω について，

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \imath^*\omega \tag{3.99}$$

である．ただし，∂D には Σ の向きに誘導された向き付けをしておくものとし，また $\imath$ は ∂D から D への包含写像を表す[31]．

---

31) 領域は部分曲面であり，また ∂D も有界であるから，(3.99) の両辺は well-defined である．

なお,「**積分の定義および Stokes の定理は曲面 Σ の計量の有無に依存しない**」ことに注意しよう．

Σ を有界かつ連結で境界のない向き付けられた d 次元曲面とする．$\partial\Sigma = \emptyset$ であるから，Stokes の定理により Σ 上の $(\mathrm{d}-1)-$ 形式 ω に対して

$$\int_{\Sigma} d\omega = 0 \tag{3.100}$$

である．

3.10.3　微分形式と無限小量

向き付けられた d 次元曲面 Σ において，$\psi(S)$ が R^{d} の元 $(0,\cdots,0)$ を含むような正の座標近傍 (S,ψ) について，$(x^1,\cdots,x^{\mathrm{d}})$ を正の局所座標系とし，d− 形式 ω を $\omega = \Omega dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{\mathrm{d}}$ と表す．$\phi \overset{\mathrm{def}}{=} \psi^{-1}$ とおいて，直方体領域 $\Delta V \overset{\mathrm{def}}{=} \phi(\{u=(u^1,\cdots,u^{\mathrm{d}})|0<u^\mu<\Delta u^\mu,\ \mu=1,2,\cdots,\mathrm{d}\})$ を考える．Δu^μ はすべて微小正数で $\Delta V\subset S$ とする．ΔV は Σ の有界領域であるから，ω の ΔV 上での積分が定義され，それは

$$\int_{\Delta V}\omega = \int_0^{\Delta u^1}\cdots\int_0^{\Delta u^{\mathrm{d}}}\Omega(\phi(u))\,du^1\cdots du^{\mathrm{d}} \tag{3.101}$$

で与えられる．積分の平均値の定理によれば，領域 $\psi(\Delta V)$ に含まれるある点 $u=\xi=(\xi^1,\cdots,\xi^{\mathrm{d}}),\ 0<\xi^\mu<\Delta u^\mu$ に対して,

$$\int_{\Delta V}\omega = \Omega(\phi(\xi))\Delta u^1\cdots\Delta u^{\mathrm{d}} \tag{3.102}$$

である．$\Omega(\phi(\xi))$ は直方体 $\psi(\Delta V)$ 内での $\Omega\circ\phi$ の平均値（平均密度量）であるが，この直方体の稜の両端の座標差 Δu^μ はすべて微小であるから，$\Omega(\phi)$ は $\psi(\Delta V)$ 内で近似的に一定値 $\Omega(\phi(\xi))$ をとる．したがって，$dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{\mathrm{d}}$ と $\omega=\Omega dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{\mathrm{d}}$ は，それぞれ，無限小直方体領域 $dV \overset{\mathrm{def}}{=} \psi^{-1}(\{u=(u^1,\cdots,u^{\mathrm{d}})|0<u^\mu<du^\mu,\ \mu=1,2,\cdots,\mathrm{d}\})$ の体積およびこの領域における密度量を表すものと考えられる．なお，この体積は向きの情報も含んでいる．例えば，$dx^2\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{\mathrm{d}} = -dx^1\wedge dx^2\wedge\cdots\wedge dx^{\mathrm{d}}$ である．

3.11 テンソル場についての補足

ここで，テンソル場について若干補っておく．

$\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_N\}$ を線型空間 W の基底とし，$(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ を d 次元曲面 Σ の任意の座標近傍 (S, ψ) における局所座標系として，標準基底 $\{\vec{e}_{\mu_1 \cdots \mu_p} | \mu_1, \cdots, \mu_p = 1, 2, \cdots, N\}$ を用いて[32]，

$$\left.\begin{aligned} \hat{t} &= \vec{e}_{\mu_1 \cdots \mu_p} \otimes t^{\mu_1 \cdots \mu_p} \\ t^{\mu_1 \cdots \mu_p} &= t^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_q} \end{aligned}\right\} \tag{3.103}$$

と表される $\hat{t}$ のことを $\otimes^p(W)$ に値をもつ **q 階共変テンソル場**という．ここに，$t^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ は S 上の実数値関数であって，添数 $\nu_1, \cdots, \nu_p$ は $1, 2, \cdots, \mathrm{d}$ の値をとるものとする．アフィン空間 $\{M; V\}$ 上の $[p, q]$ 型のテンソル場は，$\otimes^p(V)$ に値をもつ q 階共変テンソル場である．

定義 3.11.1. $\otimes^p(W)$ に値をもつ q 階共変テンソル場 $\hat{t}$ がパラメーター τ $(\tau \in R)$ にも依存しており，局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ に関する表示 (3.103) における関数 $t^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ $(\mu_1, \cdots, \mu_p = 1, 2, \cdots, N, \nu_1, \cdots, \nu_q = 1, 2, \cdots, \mathrm{d})$ がすべて $R \times S$ の上の可微分関数であるとき，τ による $\hat{t}$ の偏微分 $\partial\hat{t}/\partial\tau$ を

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \hat{t}}{\partial \tau} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \vec{e}_{\mu_1 \cdots \mu_p} \otimes \frac{\partial}{\partial \tau} t^{\mu_1 \cdots \mu_p} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} t^{\mu_1 \cdots \mu_p} &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} t^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \right) dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_q} \end{aligned}\right\} \tag{3.104}$$

によって定義する[33]．ただし，$(\partial/\partial\tau) t^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q}$ は

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial \tau} t^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} \right)(\tau, P) \\ &\quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{(t^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q})(\tau + \Delta\tau, P) - (t^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q})(\tau, P)}{\Delta\tau} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \forall (\tau, P) \in R \times S \end{aligned}\right\} \tag{3.105}$$

---

32) $\vec{e}_{\mu_1 \cdots \mu_p} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \vec{e}_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{\mu_p}$ である．

33) 同様にして，一般に $\otimes^p(W)$ に値をもちパラメーター τ に依存する混合テンソル場を考え，このテンソル場の τ による偏微分を定義することができる．

で定義される，$R \times S$ 上の実数値関数である．

容易にわかるように，$\partial\hat{t}/\partial\tau$ は well-defined である．すなわち $\partial\hat{t}/\partial\tau$ はそれを定義する際に用いた基底 $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_N\}$ および局所座標系 $(x^1, \cdots, x^{\mathrm{d}})$ のとり方によらない．$\partial\hat{t}/\partial\tau$ は $\otimes^p(W)$ に値をもつ q 階共変テンソル場である．

第 4 章における電磁場の 3 次元形式においては，電磁場の諸量は 3 次元の物理的空間上の時間変数をパラメーターとするテンソル場と見なされ，それらの量の時間変数による微分を考えることになる．

定義 3.11.2. 上の $\hat{t}$ において，とくに $\mu_1, \cdots, \mu_p$ のすべての値に対して $t^{\mu_1\cdots\mu_p}$ が $q-$ 形式である場合，すなわち $\hat{t}$ が

$$\hat{t} = \frac{1}{q\,!} t^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} \vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p} \otimes (dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}) \tag{3.106}$$

と表される場合，$\hat{t}$ のことを $\otimes^p(W)$ **に値をもつ q 次微分形式**（あるいは **$q-$ 形式**）という．このとき，

$$d\hat{t} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{q\,!} \vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p} \otimes (dt^{\mu_1\cdots\mu_p}{}_{\nu_1\cdots\nu_q} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_q}) \tag{3.107}$$

によって $\hat{t}$ の**外微分**を定義する．

$d\hat{t}$ は well-defined であり，$\otimes^p(W)$ に値をもつ $(q+1)-$ 形式である．

定義 3.11.3. φ を曲面 Σ から曲面 Ξ への写像とし，$\otimes^p(W)$ に値をもつ Ξ 上の q 階共変テンソル場 $\hat{t}$ を (3.103) のように表して，

$$\varphi^*\hat{t} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \vec{e}_{\mu_1\cdots\mu_p} \otimes \varphi^*(t^{\mu_1\cdots\mu_p}) \tag{3.108}$$

で定義される $\varphi^*\hat{t}$ を $\hat{t}$ の φ による Σ への**引き戻し**という．ここに，記号 $\varphi^*(t^{\mu_1\cdots\mu_p})$ は実数値 q 階共変テンソル場 $t^{\mu_1\cdots\mu_p}$ の φ による Σ への引き戻しを表す．

上の $\varphi^* \hat{t}$ は well-defined であり，$\otimes^p(W)$ に値をもつ Σ 上の q 階共変テンソル場である．容易に示されるように，命題 3.9.2 に対応する命題が成り立つ．

線型空間 W を明示しなくとも混乱が起こるおそれのない場合には，$\otimes^p(W)$ に値をもつ q 階共変テンソル場，$\otimes^p(W)$ に値をもつ $q-$ 形式のことを，それぞれ単に**p 階反変テンソル場値 q 階共変テンソル場**，**p 階反変テンソル場値 q 次微分形式**（あるいは**$q-$ 形式**）とよぶ．

定義 3.11.4. Σ を向き付けられた d 次元曲面とする．Σ 上の，$\otimes^p(W)$ に値をもつ d− 形式 $\widehat{\omega} = \vec{e}_{\mu_1 \cdots \mu_p} \otimes \omega^{\mu_1 \cdots \mu_p}$ の D 上の積分 $\int_D \widehat{\omega}$ を

$$\int_D \widehat{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_D \omega^{\mu_1 \cdots \mu_p} \right) \vec{e}_{\mu_1 \cdots \mu_p} \tag{3.109}$$

によって定義する．ここに D は Σ の有界 d 次元部分曲面とする．

積分 $\int_D \widehat{\omega}$ は well-defined である．すなわち，(3.109) の右辺は基底 $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_N\}$ のとり方によらない．この積分は W 上の p 階反変テンソルである．

第 4 章における電磁場の運動量，エネルギー運動量，角運動量等はこのタイプの積分量である．

命題 3.10.5 を用いて容易に示されるように，次の命題が成り立つ．

命題 3.11.1. **（反変テンソル場値微分形式に対する Stokes の定理）** Σ を向き付けられた d 次元曲面とし，D を Σ の滑らかな境界 ∂D をもつ有界領域とする．このとき，Σ 上の反変テンソル場値 (d − 1)− 形式 $\widehat{\omega}$ について

$$\int_D d\widehat{\omega} = \int_{\partial D} \imath^* \widehat{\omega} \tag{3.110}$$

が成り立つ．ただし，∂D には Σ の向きに誘導された向き付けをしておくものとし，また，$\imath$ は ∂D から D への包含写像を表す．

3.12 3 次元ベクトル解析

微分形式，外微分，Stokes の定理等は，よく知られた 3 次元 Euclid 空

間のベクトル解析における諸概念，定理の発展形態である．本節では，この点についてみていこう．

向き付けられた3次元 Euclid 空間[34)] を考え，これを $\mathcal{E}^3{}_o = \{E; V^3{}_o\}$ と表す．地球表面上南北両極以外の1点を原点 O とし，位置ベクトルが $\mathbf{E}_1$ である向き，$\mathbf{E}_2$ である向き，$\mathbf{E}_3$ である向きが，それぞれ緯線に沿って東向き，経線に沿って北向き，鉛直上向きであるような正規直交座標枠 $[O;\{\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3\}]$ のことを**右手系**という．3次元のベクトル解析においては，右手系が正であるように向き付けするのが慣例である．ここでも慣例に従うこととし，$[O;(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3)] \stackrel{\text{def}}{=} [O;\{\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3\}]$ を右手系とする[35)]．

3.1 節の最後の部分の記述からわかるように，$[O;(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3)]$ に関する座標系 (X^1,X^2,X^3) を用いたときの任意の点 $P \in E$ における接ベクトル空間 $T_P(E)$ における自然基底 $((\partial/\partial X^1)_P,(\partial/\partial X^2)_P,(\partial/\partial X^3)_P)$ と正の正規直交基底 $(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3)$ とは同一視される．P は任意であるから，$(\partial/\partial X^1,\partial/\partial X^2,\partial/\partial X^3)$ と $(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3)$ とが同一視される．したがって，(dX^1,dX^2,dX^3) と $(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3)$ の双対基底 $(\vec{E}^1,\vec{E}^2,\vec{E}^3)$ とは同一視されることになる．また，$\mathbf{E}_a$ と $\vec{E}^b$ とは定義 1.3.2 における線型同型写像 ζ とその逆写像 κ によって，$\zeta(\mathbf{E}_a) = g_{ab}\vec{E}^b$, $\kappa(\vec{E}^a) = g^{ab}\mathbf{E}_b$ の関係によって結ばれている．いまの場合，$g_{ab} = g(\mathbf{E}_a,\mathbf{E}_b) = \delta_{ab}$ であるから $\zeta(\mathbf{E}_a) = \vec{E}^a, \kappa(\vec{E}^a) = \mathbf{E}_a$ となる．まず，0− 形式（スカラー場）φ の外微分を考えよう．

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial X^a}dX^a = \frac{\partial\varphi}{\partial X^a}\vec{E}^a \tag{3.111}$$

である．したがって，

$$\mathrm{grad}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \kappa(d\varphi) \tag{3.112}$$

とおくと

$$\mathrm{grad}\varphi = \sum_{a=1}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial X^a}\mathbf{E}_a \tag{3.113}$$

---

34) Euclid 空間がアフィン空間の意味で向き付けられているとき**向き付けられた Euclid 空間**という．

35) 命題 1.3.29 の直前の部分で述べた流儀に沿って，$V^3{}_o$ のベクトル（反変ベクトル）は太文字を用いて表すことにする．ただし，$V^3{}_o$ の双対空間 $(V^3{}_o)^*$ の元についてはこの限りではない．

となる．κ は (3.49) で定義された反変ベクトル場を共変ベクトル場に写す写像 ζ の逆写像であり，共変ベクトル場と反変ベクトル場を同一視することができる．したがって,「スカラー場 φ の**勾配**は外微分 $d\varphi$ のことである」といってよい．

共変ベクトル場 $A = A_a dX^a$ について，外微分 dA は

$$dA = \left(\frac{\partial A_2}{\partial X^1} - \frac{\partial A_1}{\partial X^2}\right) dX^1 \wedge dX^2 + \left(\frac{\partial A_3}{\partial X^2} - \frac{\partial A_2}{\partial X^3}\right) dX^2 \wedge dX^3 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial X^3} - \frac{\partial A_3}{\partial X^1}\right) dX^3 \wedge dX^1 \tag{3.114}$$

となるが，$\star(dX^1 \wedge dX^2) = dX^3$ 等であるから共役 $\star dA$ は

$$\star dA = \left(\frac{\partial A_3}{\partial X^2} - \frac{\partial A_2}{\partial X^3}\right) dX^1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial X^3} - \frac{\partial A_3}{\partial X^1}\right) dX^2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial X^1} - \frac{\partial A_1}{\partial X^2}\right) dX^3 \tag{3.115}$$

となる．反変ベクトル場[36)]

$$\mathbf{A} \overset{\text{def}}{=} \kappa(A) = \sum_{a=1}^{3} A_a \frac{\partial}{\partial X^a} = \sum_{a=1}^{3} A_a \mathbf{E}_a \tag{3.116}$$

を考え，

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} \overset{\text{def}}{=} \kappa(\star d(\zeta(\mathbf{A}))) = \kappa(\star dA) \tag{3.117}$$

とすると

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial X^2} - \frac{\partial A_2}{\partial X^3}\right) \mathbf{E}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial X^3} - \frac{\partial A_3}{\partial X^1}\right) \mathbf{E}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial X^1} - \frac{\partial A_1}{\partial X^2}\right) \mathbf{E}_3 \tag{3.118}$$

である．これはベクトル場 $\mathbf{A}$ の**回転**に対する通例の表示である．

---

36) 本来は，反変ベクトル場の成分は「上付き」の添数で A^a のように表されるべきものである．しかし，Euclid 空間における正規直交座標枠による成分に関しては両者を区別する必要はない．

共変ベクトル場 A に対応して反変ベクトル場 $\mathbf{A} = \kappa(A)$ を考え，

$$\mathrm{div}\mathbf{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \star d \star A \tag{3.119}$$

とする．$\star A = A_1 dX^2 \wedge dX^3 + A_2 dX^3 \wedge dX^1 + A_3 dX^1 \wedge dX^2$ の外微分

$$d \star A = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial A_a}{\partial X^a} dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3 \tag{3.120}$$

の共役は

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \star d \star A = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial A_a}{\partial X^a} \tag{3.121}$$

となる．これは $\mathbf{A}$ の**発散**を表している．

定義 3.8.1 におけるラプラシアン Δ について考える．いまの場合 $\mathrm{d}=3, a=0$ であるから，$q-$ 形式 ω について

$$\Delta\omega = (-1)^{(3-q)(q-1)}\{d \star d \star \omega - \star d \star d\omega\} \tag{3.122}$$

となる．ω がスカラー場 φ である場合

$$d \star d \star \varphi = 0, \quad \star d \star d\varphi = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial X^a)^2} \tag{3.123}$$

であり，したがって

$$\Delta\varphi = -d \star d \star \varphi + \star d \star d\varphi = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{(\partial X^a)^2} \tag{3.124}$$

である．ここに，$\partial^2/(\partial X^a)^2$ は X^a による 2 階偏微分の演算を表す．結局ベクトル解析における $\Delta\varphi$ は $-d \star d \star \varphi + \star d \star d\varphi$ のことであることがわかった．ω が $1-$ 形式 A である場合については，

$$\left.\begin{aligned} d \star d \star A &= \frac{\partial}{\partial X^b}\left(\sum_{a=1}^{3} \frac{\partial A_a}{\partial X^a}\right) dX^b \\ \star d \star dA &= \left[\frac{\partial}{\partial X^b}\left(\sum_{a=1}^{3} \frac{\partial A_a}{\partial X^a}\right) - \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial^2 A_b}{(\partial X^a)^2}\right] dX^b \end{aligned}\right\} \tag{3.125}$$

であるから，

$$\Delta A = d\star d\star A - \star d\star dA = \sum_{a=1}^{3}\frac{\partial^2 A_b}{(\partial X^a)^2}dX^b \tag{3.126}$$

となる．したがって，

$$\Delta\mathbf{A} = \Delta\kappa(A) \overset{\text{def}}{=} \kappa(\Delta A) = \sum_{a,b=1}^{3}\frac{\partial^2 A_b}{(\partial X^a)^2}\mathbf{E}_b \tag{3.127}$$

となる．なお，$\kappa(d\star d\star A) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A})$, $\kappa(\star d\star dA) = \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{A})$ であるから

$$\Delta\mathbf{A} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{A}) \tag{3.128}$$

となるが，これはベクトル解析でよく知られた公式である．

さらに，ω が 2− 形式である場合，3− 形式である場合のいずれについても，

$$\Delta\omega = \sum_{a=1}^{3}\frac{\partial^2\omega}{(\partial X^a)^2} \tag{3.129}$$

であることがわかる．ここに，$\partial^2\omega/(\partial X^a)^2$ は，$q-$ 形式 ω を成分表示したときその成分に $\partial^2/(\partial X^a)^2$ を作用させたものを成分とする $q-$ 形式を表す．

また，スカラー場 φ と共変ベクトル場 A について，命題 3.8.3 より，

$$\mathrm{rot}\ (\mathrm{grad}\ \varphi) = \kappa(*d^2\varphi) = 0, \qquad \mathrm{div}\ (\mathrm{rot}\ \mathbf{A}) = \star d(\star(\star dA)) = \star d^2 A = 0 \tag{3.130}$$

が得られる．ここで，第 2 式を導く際，(3.62) を用いた．これらもベクトル解析でおなじみの公式である．

Poincaré の補題（=命題 3.8.4）からの帰結をみてみよう．この補題によれば，$dA = 0$ を満足する共変ベクトル場 A に対しては $A = d\varphi = \zeta(\mathrm{grad}\varphi)$ であるような 0− 形式，すなわちスカラー場 φ が存在する．ところで，$dA = 0$ と $\kappa(\star dA) = \mathrm{rot}\mathbf{A} = 0$ とは同等であるから，結局「$\mathrm{rot}\mathbf{A} = 0$ であれば，$\mathbf{A} = \mathrm{grad}\varphi$ なるスカラー場が存在する」ことになる．2− 形式 ω について，$d\omega = 0$ とすると，1− 形式 A が存在して $\omega = dA$ である．$\star\omega$ は 1− 形式であるから，$B \overset{\text{def}}{=} \star\omega = B_a dX^a$ と表示され，したがって $B = \star dA$，すなわ

ち，$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ となる．$d\omega = d\star B = \star\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0$ であるから，$d\omega = 0$ は，$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ と同等である．結局,「$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$ であれば，$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ なる反変ベクトル場 $\mathbf{A}$ が存在する」ことがわかった．これらもベクトル解析でよく知られた事実である．

なお，$\mathrm{grad}\varphi$, $\mathrm{rot}\mathbf{A}$, $\mathrm{div}\mathbf{A}$, $\Delta\omega$ は，それぞれ (3.112)，(3.117)，(3.119) および (3.122) で定義される．これらの**定義式の右辺はいずれも座標系のとり方に依存しない**．それらを正の正規直交座標枠（右手系）を使って成分表示したものが，(3.113)，(3.118)，(3.121)，(3.124)，(3.126) および (3.129) である[37]．通例のベクトル解析の教程では，むしろこれらの成分表示を用いて grad, rot, div, Δ 等を定義しているのである．成分表示による定義を採用した場合には，これらの演算が座標系に依存しないことは別途証明されるべきこととなる．

考えている空間 $\mathcal{E}^3{}_o$ はアフィン空間の一種であるから，前節の最後に述べたことによれば，任意の 3− 形式 ω について，$\omega = d\vartheta$ なる 2− 形式 ϑ が存在する．3 次元のベクトル解析の教程では，この命題に相当するものにお目に掛かることは少ない．ω, ϑ を成分表示したときの独立成分の数はそれぞれについて 1 および 3 であって,「単純なものを複雑なものの微分として表す」ということになりあまり実用的でないからであるが,「まるで役立たずな命題」ではない．

電磁気学における例で考えよう．電気量密度 $\rho^{(\mathrm{e})}$ および電束密度 D は，それぞれ 3− 形式，2− 形式であり，Gauss の法則は $dD = \rho^{(\mathrm{e})}$ と表されるが[38]，任意に与えられた電気量密度 $\rho^{(\mathrm{e})}$ に対して，これを源とする電束密度 D が必ず存在することをこの命題は保証しているのである．

命題 3.10.5（=Stokes の定理）において，Σ が $\mathcal{E}^3{}_o$ における曲面である場合について，この定理の具体的表示を求めてみると，ベクトル解析で学ぶ通例の Stokes の定理，Gauss の定理等が得られる．このことをみてみよう．

Γ を $\mathcal{E}^3{}_o$ における向き付けられた 1 次元曲面（曲線）の滑らかな境界を

---

37) なお，これらの 6 つの式に現れる演算子のうち，rot の定義には星印作用素 $\star$ が因子として 1 回（奇数回）現れ，grad, div, Δ の定義には $\star$ は因子として偶数回現れる．この点に注目すれば容易にわかるように，(3.118) 以外の 5 つの式は (X^1, X^2, X^3) が負の正規直交座標系であるとした場合についても成り立つ．

38) 電磁場の基礎方程式 (4.36) を参照．

もつ有界領域とし，φ を E 上の 0– 形式とする．命題 3.10.5 によれば，

$$\int_{\Gamma} I^* d\varphi = \int_{\partial\Gamma} \imath^*\varphi = \varphi(B) - \varphi(A) \tag{3.131}$$

である．ここに，A, B は Γ の端点（境界点）であり，Γ の向き付けられた境界 $\partial\Gamma$ を $\partial\Gamma = \{B\} - \{A\}$ によって定義した．また，$I, \imath$ はそれぞれ Γ から E への，$\partial\Gamma$ から Γ への包含写像を表す．$\Gamma, \partial\Gamma$ は共に $\mathcal{E}^3{}_o$ の部分集合なので，これらの上の点をすべて E 内の点と同一視することにして，公式 (3.131) における記号 $I^*, \imath^*$ を書くことを省略すると[39]，この公式はベクトル解析における「スカラー場 φ の勾配の Γ に沿う線積分は，Γ の両端の値の差で与えられる」という命題そのものになっていることがわかる．この命題は 1 変数関数 f に対する積分公式

$$\int_{x_1}^{x_2} df = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dx} dx = f(x_2) - f(x_1) \tag{3.132}$$

の一般化であり，したがってまた命題 3.10.5 は (3.132) の一般化である．

E 上の 1– 形式 $\omega = A_a dX^a$ について $d\omega = (1/2\,!)(\partial A_b/\partial X^a - \partial A_a/\partial X^b)\, dX^a \wedge dX^b$ である．したがって，σ を $\mathcal{E}^3{}_o$ における向き付けられた 2 次元曲面 Σ の有界領域であって滑らかな境界 $\partial\sigma$ をもつものとすると，命題 3.10.5 の内容は，この σ, ω については

$$\frac{1}{2\,!} \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial A_b}{\partial X^a} - \frac{\partial A_a}{\partial X^b} \right) dX^a \wedge dX^b = \int_{\partial\sigma} A_a dX^a \tag{3.133}$$

となるが，これは 3 次元ベクトル解析における **Stokes の定理**である．(3.133) において σ が閉曲面である場合を考えると，$\partial\sigma = \emptyset$ であるから右辺は 0 となるが，これは (3.100) の特殊な例になっている．

V を E における 3 次元曲面の滑らかな境界 ∂V をもつ有界領域とする．ω を E 上の 2– 形式とすると，$\omega = (1/2\,!) A_{ab} dX^a \wedge dX^b$ と表されるので

$$d\omega = \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial X^3} + \frac{\partial A_{23}}{\partial X^1} + \frac{\partial A_{31}}{\partial X^2} \right) dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3 \tag{3.134}$$

39）本書の以下の部分では，**部分曲面からそれが埋め込められている曲面への包含写像による引き戻しの記号は省略する**．また，考える領域 σ, V 等の境界 $\partial\sigma, \partial V$ 等は，それぞれ $\Sigma, \mathcal{E}^3{}_o$ の向きに誘導された向き付けをされているものとする．

であり，命題 3.10.5 は，この場合

$$\iiint_V \left(\frac{\partial A_{12}}{\partial X^3}+\frac{\partial A_{23}}{\partial X^1}+\frac{\partial A_{31}}{\partial X^2}\right) dX^1\wedge dX^2\wedge dX^3$$
$$=\iint_{\partial V}(A_{12}dX^1\wedge dX^2+A_{23}dX^2\wedge dX^3+A_{31}dX^3\wedge dX^1) \tag{3.135}$$

となるが，これは **Gauss の定理**である．

以上の考察から，3 次元 Euclid 空間の通例のベクトル解析は微分形式の理論の特殊な例であることがわかった．ベクトル解析では個別に扱われていた内容が微分形式の理論にあっては簡明かつ統一的に扱われている．**勾配，回転，発散，ラプラシアンは，すべて外微分の演算と Hodge の星印作用素によって表されている．公式 (3.132)，Stokes の定理，Gauss の定理等の積分公式はすべて本質的には同じものであり，曲面 Σ 上の微分形式に対する Stokes の定理（＝命題 3.10.5）における公式 (3.99) の特殊な例**と見なされるのである．

第4章　特殊相対性理論

以上で数学的準備を終え，漸く物理学に入ることにする．

数学から物理学への繋ぎとして，1つだけ補っておく．長さ，質量，時間，速度，運動量，電気量，電場，電流等々，物理学に現れる量の多くは，**ディメンション**[1] をもっている．ディメンションの異なる量同士の和は定義されない．例えば，**Newton 力学（古典力学）**における速度と運動量は共に3次元空間のベクトルであるが，速度と運動量の和は定義されない．数学でいう線型空間にはディメンションの概念が欠落しているから，物理学で用いる際には，その点についての補いが必要である．

定義 4.1. 線型空間 V, W について，ディメンションをもった実定数 K が存在して，V の元 $\vec{v}$ に対して，$\vec{w} \overset{\mathrm{def}}{=} K\vec{v}$ が W の元であって，写像 $K : \vec{v} \longrightarrow \vec{w} = K\vec{v}$ が V から W の上への線型同型写像を与えているとき，V と W とは**平行な線型空間**であるという．また，W の元 $\vec{w}$ と V の元 $\vec{v}$ が $\vec{w} = K\vec{v}$ の関係にあるとき，$\vec{w}$ と $\vec{v}$ とは平行であるといい，$\vec{w}//\vec{v}$ あるいは $\vec{v}//\vec{w}$ と表す．

Newton 力学において，速度ベクトル全体のつくる線型空間と運動量ベクトル全体のつくる線型空間とは平行な線型空間である．

ディメンションの異なる線型空間に属するベクトル，テンソル，交代形式同士の和は定義されないが，内積，外積等諸種の積の演算は，それらの量のディメンションを無視した場合にその演算が定義されるならば，自然な仕方で定義される．すなわち，積に現れる諸量のディメンションが共通

1）「ディメンション」は本来の日本語では「次元」ということになるが，本書においては，言葉を区別して「長さのディメンションは L，我々の住んでいる空間の次元数は 3」という意味合いで用いる．

になるように因子を掛け（あるいは因子で割り），ディメンションの揃った量同士で積を定義して，最後にそれらの因子で割る（あるいは因子を掛ける）ことによりディメンションを元に戻せばよい[2)]. 以下においては，ディメンションの異なる量同士の諸種の積はこのようにして定義されているものとする.

相対性理論（特殊相対性理論および**一般相対性理論**）の根本思想の 1 つに,「物理量および物理法則は，それを記述するために用いた基底あるいは座標系のとり方によらない」ということがある. この思想は，歴史的には，相対論との関わりにおいて明確に意識されるようになったといってよい. しかし，相対論ができ上がり，また代数学や幾何学における「基底無依存，座標系無依存な定式化」ができてみると，この思想は，極めて自然な普遍的原理であって，相対論のみならず，物理学全般を貫いていることがわかる. 量子力学における,「系の状態は Hilbert 空間のベクトルで表されるが，これは Hilbert 空間の基底のとり方によらない」ことなどはその例である.

特殊相対論は Newton 力学および Maxwell の**電磁気学**の理論体系から,「物理的時間と物理的空間とは，それぞれが独立な 1 次元空間，3 次元空間なのではなく，それらを合わせたものが 4 次元 Minkowski 空間となっている」ことを読み取ることによって構成される. 我々は，まず Newton 力学と電磁気学の基礎的部分を可能な限り基底無依存，座標系無依存な形に定式化して，それを手がかりとして特殊相対論に至るという道筋をたどることにする.

4.1　Newton 力学および電磁気学の 3 次元形式

Newton 力学と Maxwell の電磁気学における基礎方程式の 3 次元的表示を，ベクトル，テンソルおよび微分形式の知識に基づいて，できるだけ簡明な形式に定式化し，基礎的諸量のテンソル性を調べておく. これらの理論においては，アフィン空間の一種である 3 次元 Euclid 空間における物体の位置の時間変化，電磁場，電気量および電流の時間変化，空間分布が扱

---

2) これが可能であることは，これらの積の演算がそこに現れる各因子について線型であることにより保証されている.

われている．

物理的時間および物理的空間は，それぞれ向き付けられた 1 次元 Euclid 空間および向き付けられた 3 次元 Euclid 空間であるものと仮定し，これらを，それぞれ $\mathcal{T} = \{T; V_{oT}\}$ および $\mathcal{S} = \{S; V_{oS}\}$ と記す．以下では慣習にならって，$\mathcal{T}$ と $\mathcal{S}$ はそれぞれ未来方向および右手系が正であるように向き付けされているものとして扱う．

時刻は T の点であり，空間内の位置は S の点で表される．$\mathcal{S} = \{S; V_{oS}\}$ 内での質点の運動を考えることにして，その軌跡は，T_D を T における領域として曲線 $\Gamma : T_D \to S$ で表されるものとする．時刻[3)] τ （$\tau \in T_D$）に対して $\tau \in U$ なる T の座標近傍 (U, ψ) であって (ψ) が正の局所座標系であるものをとり，$s \overset{\text{def}}{=} \psi(\tau)$ とする．また (x^1, x^2, x^3) を $\Gamma(\tau)$ の近傍における S の局所座標系とする．$\Gamma^\alpha(s) \overset{\text{def}}{=} x^\alpha(\Gamma(\tau))$ とおいて[4)]

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}(s) &\overset{\text{def}}{=} \frac{d\Gamma^\alpha(s)}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_{\Gamma(\tau)} \\
\mathbf{a}(s) &\overset{\text{def}}{=} \frac{D\mathbf{v}(s)}{Ds} \\
&\overset{\text{def}}{=} \left[\frac{d^2\Gamma^\alpha(s)}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{Bmatrix}\Big(\Gamma(\tau)\Big)\frac{d\Gamma^\beta(s)}{ds}\frac{d\Gamma^\gamma(s)}{ds}\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_{\Gamma(\tau)}
\end{aligned} \tag{4.1}$$

で定義される $\mathbf{v}(s), \mathbf{a}(s)$ のことを，それぞれ時間 $\mathcal{T}$ の座標近傍 (U, ψ) および空間 $\mathcal{S}$ の局所座標系 (x^1, x^2, x^3) における，時刻 τ での質点の**速度**および**加速度**という．ここに，$\left\{\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta\ \gamma \end{smallmatrix}\right\}$ は，S の計量 g の成分 $g_{\alpha\beta} \overset{\text{def}}{=} g(\partial/\partial x^\alpha, \partial/\partial x^\beta)$ を用いて (3.45) のように定義された Christoffel 記号である．$\mathbf{a}(s)$ は $\mathbf{v}(s)$ の Γ に沿う絶対微分である．$\Gamma(\tau)$ の近傍における S の別の局所座標系 $(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ を考えても，(3.9) および (3.44) についての記述からわかるように，$\mathbf{v}(s), \mathbf{a}(s)$ **は，変換** $(x^1, x^2, x^3) \to (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ **が時刻** τ **に依存しな**

3） この τ を後出の固有時と混同しないように．

4） 本書の以下の部分では，3 次元 Euclid 空間，あるいは 4 次元 Minkowski 空間における空間的超曲面とその接ベクトル空間において，諸量の一般の座標枠（正規直交座標枠）あるいは一般の局所座標系（正規直交座標系）に関する添数をギリシャ語のアルファベットの最初の部分 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ （英語のアルファベットの最初の部分 $a, b, c, \cdots$）で表す．添数 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots, a, b, c, \cdots$ は，値 $1, 2, 3$ をとる．

い限り，この変換のもとで不変である．この意味で，速度と加速度は共にベクトルである．

(4.1) の内容を極座標 $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$ $(0 < r,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi < 2\pi)$ の場合を例にとって具体的にみてみよう．この場合は，$g_{11} = 1$, $g_{22} = (x^1)^2 = r^2$, $g_{33} = (x^1 \sin(x^2))^2 = (r \sin\theta)^2$, $g_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$ であり，Christoffel 記号 $\left\{ {\alpha \atop \beta\ \gamma} \right\}$ のうち 0 でないものは，

$$\left.\begin{aligned} &\left\{ {1 \atop 2\ 2} \right\} = -r, \quad \left\{ {1 \atop 3\ 3} \right\} = -r \sin^2\theta, \quad \left\{ {3 \atop 2\ 3} \right\} = \cot\theta \\ &\left\{ {2 \atop 1\ 2} \right\} = \frac{1}{r} = \left\{ {3 \atop 1\ 3} \right\}, \quad \left\{ {2 \atop 3\ 3} \right\} = -\sin\theta\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

である．

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{e}_r \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{\Gamma(\tau)}, \quad \mathbf{e}_\theta \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)_{\Gamma(\tau)} \\ &\mathbf{e}_\phi \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\right)_{\Gamma(\tau)} \end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

とおくと $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ は V_{oS} の正の正規直交基底であるが，(4.1) から $\mathbf{v}(s)$, $\mathbf{a}(s)$ に対する極座標表示

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(s) &= \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + (r\dot{\phi}\sin\theta)\,\mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{a}(s) &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta)\mathbf{e}_\phi \end{aligned} \tag{4.4}$$

が得られる．ここに変数に付けたドット記号 $\dot{}$ は s に関する微分を表す．例えば，$\dot{r} \overset{\text{def}}{=} dr/ds$, $\ddot{r} \overset{\text{def}}{=} d^2r/ds^2$ である．(4.4) は Newton 力学やベクトル解析の本でおなじみの表式である．

また，局所座標系 (x^1, x^2, x^3) が S の座標枠 $[O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)]$ に関する座標系である場合には，$\Gamma(\tau) = O_S + \mathbf{x}(s) = O_s + \Gamma^\alpha(s)\mathbf{e}_\alpha$ と表されるが，このときは

$$\mathbf{v}(s) = \frac{d\Gamma^\alpha(s)}{ds}\mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{a}(s) = \frac{d^2\Gamma^\alpha(s)}{ds^2}\mathbf{e}_\alpha \tag{4.5}$$

となる．この $\mathbf{v}, \mathbf{a}$ のことを，それぞれ座標枠 $[O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)]$ における速度，加速度という．(4.5) において $\mathbf{e}_\alpha$ が s に依存しなければ，$\mathbf{x} = x^\alpha\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{v}, \mathbf{a}$ は

$\mathbf{v}(s) = d\mathbf{x}(s)/ds \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta s \to 0}\{\mathbf{x}(s+\Delta s) - \mathbf{x}(s)\}/\Delta s$, $\mathbf{a}(s) = d\mathbf{v}(s)/ds \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta s \to 0}\{\mathbf{v}(s+\Delta s) - \mathbf{v}(s)\}/\Delta s = d^2\mathbf{x}(s)/ds^2 \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta s \to 0}\{d\mathbf{x}(s+\Delta s)/ds - d\mathbf{x}(s)/ds\}/\Delta s$ の関係にある.

$\tau \in U'$ であるような T の座標近傍 (U', ψ') であって (ψ') が正の局所座標系であるものをとり, $s' \stackrel{\text{def}}{=} \psi'(\tau)$, $\Gamma'^{\alpha}(s') \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma^{\alpha}(s)$ とおいて,

$$\mathbf{v}'(s') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\Gamma'^{\alpha}(s')}{ds'}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\right)_{\Gamma(\tau)}, \quad \mathbf{a}'(s') \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D\mathbf{v}'(s')}{Ds'} \tag{4.6}$$

とすると, 次の命題が成り立つ.

命題 4.1.1.

$$\mathbf{v}'(s') = \frac{df(s')}{ds'}\mathbf{v}(s), \quad \mathbf{a}'(s') = \frac{d^2 f(s')}{ds'^2}\mathbf{v}(s) + \left(\frac{df(s')}{ds'}\right)^2 \mathbf{a}(s) \tag{4.7}$$

である. ただし, f は $f \stackrel{\text{def}}{=} \psi \circ (\psi')^{-1}$ で定義される $\psi'(U \cap U')$ から $\psi(U \cap U')$ の上への微分同型写像であり, $s = f(s')$ である.

証明: $d\Gamma'^{\alpha}(s')/ds' = (ds/ds')(d\Gamma^{\alpha}(s)/ds) = (df(s')/ds')(d\Gamma^{\alpha}(s)/ds)$ および $d^2\Gamma'^{\alpha}(s')/ds'^2 = (d^2 f(s')/ds'^2)(d\Gamma^{\alpha}(s)/ds) + (df(s')/ds')^2(d^2\Gamma^{\alpha}(s)/ds^2)$ により, 命題が成り立つことは明らかである.

この証明からわかるように, 空間 $\mathcal{S}$ 上のテンソル場 w が時刻 τ に依存しているとき, (4.7) に対応する関係式 $\partial w/\partial s' = (df(s')/ds')\partial w/\partial s$, $\partial^2 w/\partial s'^2 = (d^2 f(s')/ds'^2)\partial w/\partial s + (df(s')/ds')^2 \partial^2 w/\partial s^2$ が成り立つ. 速度 $\mathbf{v}(s)$, 加速度 $\mathbf{a}(s)$ および時刻に依存するテンソル場 w の微分 $\partial w/\partial s$ は時間 $\mathcal{T} = \{T; V_{oT}\}$ の正の局所座標系 (ψ) のとり方に依存するのである.

以下では, **時刻 τ を記述するのに, 時間 $\mathcal{T} = \{T; V_{oT}\}$ の座標枠 $[O_T; (\vec{E})]$ をとり, $\tau = O_T + t\vec{E}$ と表し, 時刻を表す変数としては t を採用することとする. ただし, $\vec{E}$ は正の単位ベクトルとする.**

4.1.1 Newton 力学

Newton 力学について考える. この力学の課題は空間内での物体の位置の時間的変化の記述にあるが, 理論を構成する都合上, まずは**質点**につい

ての力学を定式化するのが通例である．質点の軌跡は曲線 $\Gamma : T_D \to S$ で表され，これは局所座標系に依存しない．また (4.1) とそれに続く議論から明らかなように，速度，加速度も任意の局所座標系を用いて記述することができる．以下では，局所座標系を空間 S の座標枠に関する座標系に限定して考えることにより，Galilei 変換，慣性系という概念を導入する．これらは，Newton 力学において中核的役割を担っている．

座標枠として $[O'_S; (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)]$ をとって $\mathbf{b} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{O'_S O_S}$ とおくと，位置ベクトル $\mathbf{x}' \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{O'_S P}$ と座標枠 $[O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)]$ をとったときの位置ベクトル $\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{O_S P}$ について $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{b}$ なる関係が成り立つが，一般に $\mathbf{b}$ は t に依存する．また，基底 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ は基底 $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ の線型結合として $\mathbf{e}_\alpha = a^\beta{}_\alpha \mathbf{e}'_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3)$ と表され，$(a^\beta{}_\alpha)$ は正則行列であるが，この $a^\beta{}_\alpha$ も一般には t の関数である．そこで，$\mathbf{b}, a^\beta{}_\alpha$ のことをそれぞれ $\mathbf{b}(t), a^\beta{}_\alpha(t)$ と表すことにする．

軌跡が $\Gamma : T_D \to S$ で表される質点の運動について，$[O'_S; (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)]$ における速度 $\mathbf{v}'$，加速度 $\mathbf{a}'$ と速度 $\mathbf{v}$，加速度 $\mathbf{a}$ の関係は，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}'(t) &= \mathbf{v}(t) + \left\{ \frac{da^\alpha{}_\beta(t)}{dt} x^\beta(t) + \frac{db^\alpha(t)}{dt} \right\} \mathbf{e}'_\alpha \\
\mathbf{a}'(t) &= \mathbf{a}(t) + \left\{ 2\frac{da^\alpha{}_\beta(t)}{dt}\frac{dx^\beta(t)}{dt} + \frac{d^2 a^\alpha{}_\beta(t)}{dt^2} x^\beta(t) + \frac{d^2 b^\alpha(t)}{dt^2} \right\} \mathbf{e}'_\alpha
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

となる．ここに，$\mathbf{b}(t) = b^\alpha(t)\mathbf{e}'_\alpha$ と表した．したがって，質点の任意の運動について $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}(t)$ であるための必要十分条件は，2つの式

$$
\frac{da^\alpha{}_\beta(t)}{dt} = 0, \qquad \frac{db^\alpha(t)}{dt} = 0 \tag{4.9}
$$

が共に満足されることである．また，質点の任意の運動について $\mathbf{a}'(t) = \mathbf{a}(t), \forall \tau = O_T + t\vec{E}$ （$\in T_D$）であるための必要十分条件は，2つの式

$$
\frac{da^\alpha{}_\beta(t)}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2 b^\alpha(t)}{dt^2} = 0, \quad \forall \tau = O_T + t\vec{E} \in T_D \tag{4.10}
$$

が共に満足されることである．すべての $\tau = O_T + t\vec{E}$ に対して (4.9) が成り立てば，(4.10) も成り立つ．

(4.9) が成り立つということは 2 つの座標枠 $[O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)]$, $[O'_S; (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)]$ が互いに相対的に静止していることを意味しており，また (4.10) が成り立つということはこれら 2 つの座標枠が互いに相対的に等速度運動をしていることを意味する．かくて，互いに相対的に静止している 2 つの座標枠における速度と加速度はそれぞれ一致することがわかった．また，互いに相対的に等速度運動している 2 つの座標枠における加速度は一致する．

さらに，2 質点 P, Q があるとき，座標枠 $[O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)]$ を固定して

$$\mathbf{x}(t) \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{O_S P} = x^\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{y}(t) \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{O_S Q} = y^\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha \tag{4.11}$$

とすると $\overrightarrow{QP} = \mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)$ であるが，このとき，$d\mathbf{x}(t)/dt - d\mathbf{y}(t)/dt$ のことを Q に対する P の $[O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)]$ における**相対速度**という．座標枠の基底の間の関係 $\mathbf{e}_\alpha = a^\beta{}_\alpha \mathbf{e}'_\beta$ が時間的に不変であるような 2 つの座標枠[5)] における相対速度は一致する．

位置ベクトルは原点 O_S のとり方に依存し，速度，加速度は，座標枠 $[O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)]$ を定めた上で決まることになる．しかし，位置そのものは原点のとり方によらない．座標枠 $[O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)]$ において，原点 O_S も基底 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ も共に時刻に依存しない場合，この座標枠は物理的空間 $\mathcal{S}$ に対して静止しているものと考えられる．このような座標枠を**絶対静止系**とよぼう．絶対静止系は理論上無数に考えられるが，1 つの絶対静止系における位置ベクトル $\mathbf{x}(t)$ がすべての t に対してわかれば，質点の各時刻での空間 $\mathcal{S}$ における位置，軌跡，速度および加速度がすべてわかることになる．絶対静止系において，位置ベクトル $\mathbf{x}(t)$ が $\mathbf{V}, \mathbf{x}_0$ を共に t に依存しないベクトルとして $\mathbf{x}(t) = \mathbf{V}t + \mathbf{x}_0$ と表される場合，質点は空間 $\mathcal{S}$ に対して一定の速度 $\mathbf{V}$ で運動していて，時刻 $t = 0$ にはベクトル $\mathbf{x}_0$ で表される位置にあることになる．

このように，数学的（論理的）には,「物理的空間 $\mathcal{S}$ における位置，速度，加速度を考えることができる」のであるが，絶対静止系を物理的手段によって原理的にせよ設置できない限り，空間 $\mathcal{S}$ 内における位置，速度，加速度を認識することは物理的に不可能である．絶対静止系を手にできない以上，実際上は適当に選んだ時刻に依存する（可能性のある）座標枠を

5) 互いに相対的に等速度で運動している 2 つの座標枠はその例である．

用いて，それに対する相対的な位置，運動を記述することになる．これと関連して，座標枠の変換の特別な場合として次のものを考える．

定義 4.1.1. 2 つの座標枠 $[O_S;(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)]$, $[O'_S;(\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3)]$ が任意の t に対して (4.10) を満足する関係で結ばれているとき，一方の座標枠を他方の座標枠に写す写像を **Galilei 変換**という[6]．

互いに Galilei 変換で結ばれている座標枠については，加速度および 2 質点間の相対的な速度は共通である．すなわち，加速度および相対速度は Galilei 不変（＝Galilei 変換のもとで不変）である．

以下，Newton 力学の具体的内容に入ろう．

定義 4.1.2. 座標枠 $\mathcal{I}$ が次の条件を満足するとき，この座標枠を**慣性系**という．
条件：他の物質[7] が存在しないか，あるいは存在するとしてもそれらのすべてから十分遠く離れている質点の $\mathcal{I}$ に対する速度は時間的に一定である．

慣性系が存在することは自明ではない．Newton の第 1 法則は，その存在を主張する．

慣性の法則（Newton の第 1 法則）：慣性系が存在する．

先に述べたことから明らかなように，慣性系と Galilei 変換で結ばれている座標枠（＝ 慣性系に対して等速度で運動する座標枠）はすべて慣性系である．したがって，慣性系が 1 つでも存在すれば，実は無数に存在することになる．

慣性質量はスカラーであるものする[8]．慣性系 $\mathcal{I}$ を固定して，時刻 t における質点のこの系における位置ベクトル，速度，加速度をそれぞれ $\mathbf{x}(t),\mathbf{v}(t),\mathbf{a}(t)$ と表し，質量が m である質点の $\mathcal{I}$ における**運動量**を $\mathbf{P}(t)\stackrel{\text{def}}{=}m\mathbf{v}(t)$ により定義する．

---

6) 特殊相対論の本の多くでは，慣性系を慣性系に写す写像として Galilei 変換を捉えている．本書では，Galilei 変換という言葉をそれよりも広い意味で用いている．

7) 物体の力学を考える場面では，物体，場（例えば電磁場）などを総称して物質とよぶことにする．

8) 質量には慣性質量と重力質量があるが，本書では重力質量は現れない．**以下においては，慣性質量のことを単に質量とよぶ．**

運動の法則（Newton の第 2 法則）：慣性系において**力 F** の作用のもとで運動している質点の運動方程式は

$$\frac{D\mathbf{P}(t)}{Dt} = \mathbf{F} \tag{4.12}$$

となる．なお，$D\mathbf{P}(t)/Dt$ は，$\mathbf{P}(t)$ の Γ に沿う絶対微分であり，$\Gamma(\tau)$ の近傍における局所座標系 (x^1, x^2, x^3) を用いて $\mathbf{P}(t) = P^\alpha(t)(\partial/\partial x^\alpha)_{\Gamma(\tau)}$ と表すと

$$\frac{D\mathbf{P}(t)}{Dt} = \left[\frac{dP^\alpha(t)}{dt} + \left\{ {\alpha \atop \beta\ \gamma} \right\}\Big(\Gamma(\tau)\Big)\frac{d\Gamma^\beta(t)}{dt}P^\gamma(t)\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)_{\Gamma(\tau)} \tag{4.13}$$

と表示される．とくに (x^1, x^2, x^3) が座標枠 $[O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)]$ に関する座標系である場合には，$D\mathbf{P}(t)/Dt = (dP^\alpha(t)/dt)\mathbf{e}_\alpha$ となる．$D\mathbf{P}(t)/Dt$ は局所座標系の変換 $(x^1, x^2, x^3) \to (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ が時刻 τ に依存しない限り，この変換のもとで不変である．したがって運動方程式 (4.12) の整合性を要求すると，力 **F** もこの変換のもとで不変であるべきこととなる．

m が t に依存しない場合には，(4.12) は

$$m\frac{D^2\mathbf{x}(t)}{Dt^2} = m\frac{D\mathbf{v}(t)}{Dt} = m\mathbf{a}(t) = \mathbf{F} \tag{4.14}$$

に帰着する．ただし，$D^2\mathbf{x}(t)/Dt^2 \overset{\text{def}}{=} (D/Dt)(D\mathbf{x}(t)/Dt)$ とする．

$\mathbf{a}(t)$ は Galilei 変換のもとで不変であるから，方程式 (4.14) の整合性から，**F** は Galilei 変換のもとで不変であるべきことになる．**F** が質点の位置のみの関数[9] である場合は **F** は座標枠のとり方によらず，したがって **F** は Galilei 不変である．万有引力や，Hooke の力がその例である．また，位置と質点間の相対的な速度のみに依存する力も Galilei 不変である．Newton 力学で通例現れる力のうち電磁力[10] 以外の力は Galilei 不変であり，したがって，このとき運動方程式 (4.14) は整合性をもっている．

9） 正確には "関ベクトル" とでもいうべきところであるが，ここでは簡略化して "関数" という．以下においても，この種の語法を頻繁に用いる．

10） 電磁場中を運動する点電荷（＝電気量を帯びている質点）が電磁場から受ける力（Lorentz 力）については，後ほど議論する．

(4.8) からわかるように，座標枠 $[O'_S; (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)]$ と慣性系 $\mathcal{I} = [O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)]$ を結ぶ変換が Galilei 変換でない場合，質量 m が時間的に一定であるような質点の運動の座標枠 $[O'_S; (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)]$ を用いた記述においては，**慣性力**

$$m\left\{2\frac{da^{\alpha}{}_{\beta}(t)}{dt}\frac{dx^{\beta}(t)}{dt} + \frac{d^2a^{\alpha}{}_{\beta}(t)}{dt^2}x^{\beta}(t) + \frac{d^2b^{\alpha}(t)}{dt^2}\right\}\mathbf{e}'_{\alpha} \tag{4.15}$$

が現れることになる．

作用反作用の法則（Newton の第 3 法則）：時刻 t における 2 質点 a, b について考える[11)]．質点 a が質点 b から受ける力を $\mathbf{F}_{ab}(t)$，b が a から受ける力を $\mathbf{F}_{ba}(t)$ として，a, b の位置をそれぞれ $Q_a(t), Q_b(t)$ と表すと，$\mathbf{F}_{ab}(t) = -\mathbf{F}_{ba}(t)$ かつ $\mathbf{F}_{ab}(t) \mathbin{//} \overrightarrow{Q_a(t)Q_b(t)}$ である．

この法則から，a, b にはたらく**外力** $\mathbf{F}_a(t), \mathbf{F}_b(t)$ の和がある時間間隔の間 $\mathbf{0}$ である場合には，a, b の運動量 $\mathbf{P}_a(t), \mathbf{P}_b(t)$ の和 $\mathbf{P}_a(t) + \mathbf{P}_b(t)$ はその時間間隔の間保存すること，および，空間の任意の定点 A_S について，a, b にはたらく**外力のモーメント**の和 $\overrightarrow{A_SQ_a(t)} \curlywedge \mathbf{F}_a(t) + \overrightarrow{A_SQ_b(t)} \curlywedge \mathbf{F}_b(t)$ がある時間間隔の間 0 であれば，a, b の A_S の周りの**角運動量**の和 $\overrightarrow{A_SQ_a(t)} \curlywedge \mathbf{P}_a(t) + \overrightarrow{A_SQ_b(t)} \curlywedge \mathbf{P}_b(t)$ はその時間間隔の間保存することが帰結する[12)]．3 個以上の質点についても対応する保存則が成り立つ．なお，角運動量について，たとえば $\overrightarrow{A_SQ_a(t)} \curlywedge (\overrightarrow{A_SQ_a(t)} \curlywedge \mathbf{P}_a(t)) = 0$, $(\overrightarrow{A_SQ_a(t)} \curlywedge \mathbf{P}_a(t)) \curlywedge \mathbf{P}_a(t) = 0$ が成り立つ．これは，通例の教科書における「角運動量は，位置ベクトルと運動量の双方に直交する」という命題に対応する．

ここで，**作用反作用の法則は，共通の時刻 t における力，位置についてのもの**であって，$t \neq t'$ である場合の $\mathbf{F}_{ab}(t)$ と $\mathbf{F}_{ba}(t')$ の関係については言及していないことに注意しよう．

---

11) この場合の記号 a, b はテンソル量の成分の添数ではないことに注意．

12) 角運動量，力のモーメントは，通例はベクトル積によって定義されている．しかし，第 1 章の部分節 **1.3.4** における記述からわかるように，2 つのベクトルのベクトル積は特殊相対論が展開される 4 次元空間では定義されない．また，ベクトル積は空間の計量と向きの双方に依存するが，外積はそのどちらにも依存しない．「概念は普遍的であることが望ましい」という立場から，**本書では 3 次元の物理における角運動量，力のモーメントも外積 $\curlywedge$ を用いて定義する**ことにする．すなわち，点 Q にある運動量 $\mathbf{P}$ の質点の点 A_S の周りの角運動量 L および作用点が Q である力 $\mathbf{F}$ の A_S の周りのモーメント N をそれぞれ $L \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{A_SQ} \curlywedge \mathbf{P}$, $N \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{A_SQ} \curlywedge \mathbf{F}$ により定義する．これらは共に 2 階反変交代テンソルである．

以上の考察から,「Newton 力学においても，時間と空間とは全く切り離された別々のものとして扱われているのではない」ことがわかる.

なお，速度，運動量，さらには運動方程式 (4.12) は空間 $\mathcal{S}$ の時刻に依存しない任意の座標枠の変換のもとで不変であるが，時間 $\mathcal{T}$ の座標枠のとり方には依存していることに注意しよう.

$K \stackrel{\text{def}}{=} m(\mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t))/2$ で定義される[13] K を**運動エネルギー**という．K はスカラーである．したがって，理論の整合性から，位置エネルギーなどエネルギーはすべてスカラーであるべきこととなる．そうでないと，例えば運動エネルギーと位置エネルギーの和としての力学的エネルギーが定義できないことになってしまう．時刻 t_1 から時刻 t_2 までの間に力 $\mathbf{F}$ がなす仕事は

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F}, \mathbf{v}) dt \tag{4.16}$$

で与えられるが，これもスカラーである.

流体のように連続的に分布した物質が運動している場合を考えると，任意の有界領域 V 内に存在する全質量 m は物理的空間 S 上のある 3– 形式 ρ を V 上で積分したもの

$$m = \int_V \rho \tag{4.17}$$

で与えられると考えられる[14]．この ρ を**質量密度**とよぶ．ρ は t の関数である[15].

エネルギーについても同様であって，V 内に存在する全エネルギー U は，3– 形式であり，かつ時刻 t の関数であるところの**エネルギー密度** u の積分として与えられる：

$$U = \int_V u \tag{4.18}$$

また，領域 V 内の運動量 $\mathbf{P}$ は，反変ベクトル場値 3– 形式[16]（=1 階反

---

13) 3 次元 Euclid 的線型空間におけるベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ の内積を $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ と表す.

14) 任意に与えられた各有界領域 V それぞれに対して，対応する質量 m がすべて定まるならば，それを (4.17) の積分表示で与える密度量 ρ は一意的に定まる．同様に，以下の議論に現れる，エネルギー，運動量，電気量，電流，電束，起磁力のそれぞれに対応する密度量 $u, \mathbf{p}, \rho^{(e)}, j, D, H$ は一意的に定まる.

15) ρ は S 上の微分形式であるから，当然のことながら空間的位置依存性もある.

16) この呼称については，第 3 章の **3.11** 節を参照のこと.

変 3 階交代共変テンソル場）$\mathbf{p}$ を用いて

$$\mathbf{P} = \int_V \mathbf{p} \tag{4.19}$$

という形に表現されよう．この $\mathbf{p}$ を**運動量密度**という．$\mathbf{p}$ は t の関数である．$\rho, u, \mathbf{p}$ は空間 S の考えている点の近傍における局所座標系 (x^1, x^2, x^3) を用いて，

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{3!}\rho_{\alpha\beta\gamma}dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \\ u &= \frac{1}{3!}u_{\alpha\beta\gamma}dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \\ \mathbf{p} &= \frac{1}{3!}\mathbf{p}_{\alpha\beta\gamma} \otimes (dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma) \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

と成分表示される．$\rho_{\alpha\beta\gamma}$, $u_{\alpha\beta\gamma}$, $\mathbf{p}_{\alpha\beta\gamma}$ はすべて t の関数であって，また $\mathbf{p}_{\alpha\beta\gamma}$ はそれ自身 V_{oS} に平行な 3 次元 Euclid 的線型空間に値をもつ場である．すなわち，$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ を V_{oS} の基底とすると，$\mathbf{p}_{\alpha\beta\gamma}$ は添数 α, β, γ について交代な実数値関数 ${p^\delta}_{\alpha\beta\gamma}$ を用いて $\mathbf{p}_{\alpha\beta\gamma} = {p^\delta}_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}_\delta$ と表される．なお，(4.19) の右辺の積分は，定義 3.11.4 の仕方で定義されるものである．

質量密度，エネルギー密度，運動量密度の上述の導入は，多くの本におけるものと異なっている．しかし,「密度を V 上で積分したものが V における物理量」となっているのであるから，質量密度，エネルギー密度が共に 3– 形式，運動量密度が反変ベクトル場値 3– 形式であるのは自然なことといえる．

4.1.2　電磁気学の 3 次元形式

次に電磁気学を考えよう[17]．空間 S 内の向き付けられた任意の有界領域 V 内に存在する**電気量** q はスカラーであるものとすると，これを積分値

$$q = \int_V \rho^{(\mathrm{e})} \tag{4.21}$$

として与える電気量密度 $\rho^{(\mathrm{e})}$ は S 上の 3– 形式である．一般に，電気量 q

[17] 本書では，MKSA 有理単位系を採用する．

は時刻 t の関数であるから，**電気量密度** $\rho^{(\mathrm{e})}$ も t の関数である．電気量の分布が時間的に変化しつつある場合，空間内の向き付けられた任意の 2 次元曲面の有界領域 σ を通って，その負の側から正の側に単位時間に通過する電気量を I とするとき，I のことを σ を貫く**電流**という．I はスカラーである．これを積分値

$$I = \int_\sigma j \tag{4.22}$$

として与える量 j は S 上の 2− 形式である．j のことを**電流密度**という．一般に，I, j は共に t の関数である．

電界に電気量 q の点電荷を持ち込んで任意の位置で静止させる．この点電荷の位置を P とすると，時刻 t にこの点電荷に作用する力 $\mathbf{F}^{(\mathrm{e})}(t, P)$ は

$$\mathbf{F}^{(\mathrm{e})}(t, P) = q\mathbf{E}(t, P) \tag{4.23}$$

で与えられる．$\mathbf{E}$ は，S 上の反変ベクトル場である．また $\mathbf{E}$ による力の作用のもとで単位電気量をもつ点電荷が向き付けられた曲線の有界領域 Γ に沿って移動したとき，場 $\mathbf{E}$ のなした仕事 W は

$$W = \int_\Gamma E \tag{4.24}$$

で与えられる．ただし，E は $E \overset{\mathrm{def}}{=} \zeta(\mathbf{E})$ で定義される 1− 形式であり[18]，これのことを**電場**といい，W のことを Γ に沿う**起電力**という．起電力はスカラーである．E は時刻 t の関数であるから，起電力も t の関数である．

金属や電解質溶液のように，物体には，それに電気量を与えたとき，その電気量が短時間のうちに移動してその物体内部の電場 E が 0 であるように電気量が分布するようになるものがある．このような物体を**導体**という．電界内に導体でできた極めて薄くてその形状が向き付けられた 2 次元曲面の有界領域 σ と見なせる物体があるとき，その正の側の面に現れる電気量 Q をこの曲面を貫く**電束**という．Q はスカラーである．Q を積分値

$$Q = \int_\sigma D \tag{4.25}$$

18) E のこの導入は空間の向き付けに依拠していないことに注意しよう．ζ の定義については，(3.49) を参照．

として与える D を**電束密度**という．D は S 上の 2– 形式である．Q, D は共に t の関数である．

磁界内の任意の位置に電気量 q の点電荷を持ち込んで，任意の運動をさせる．「点電荷が時刻 t に位置 P にあって速度 $\mathbf{v}(t)$ で運動しているとき，この点電荷に作用する力 $\mathbf{F}^{(\mathrm{m})}(t,P)$ は q に比例し，$\mathbf{v}(t)$ と直交してかつ $\mathbf{v}(t)$ に線型に依存する．なお，比例係数は t, P に依存しない」ことが実験的に確認されている．したがって，命題 1.3.17，および $\mathbf{F}^{(\mathrm{m})}(t,P) \oslash \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t) \oslash \mathbf{F}^{(\mathrm{m})}(t,P) = g(\mathbf{F}^{(\mathrm{m})}(t,P), \mathbf{v}(t)) = (\mathbf{F}^{(\mathrm{m})}(t,P), \mathbf{v}(t)) = 0$ であることにより，$\mathbf{F}^{(\mathrm{m})}(t,P)$ に対応してある 2 階交代反変テンソル $\hat{B}(t,P)$ が一意的に定まって，演算積 $\oslash$ を用いて $\mathbf{F}^{(\mathrm{m})}(t,P) = -q\mathbf{v}(t) \oslash \hat{B}(t,P)$ と表される．そこで，任意の時刻 t，任意の点 P に対して $B(t,P) \overset{\mathrm{def}}{=} \zeta(\hat{B}(t,P))$ とすると，S 上の t に依存する 2– 形式 B が定まる．すなわち，$\mathbf{F}^{(\mathrm{m})}(t,P)$ に対応して **2– 形式 B が一意的に存在して，**

$$\mathbf{F}^{(\mathrm{m})}(t,P) = -q\mathbf{v}(t) \oslash \kappa(B(t,P)) = q\kappa(B(t,P)) \oslash \mathbf{v}(t) \tag{4.26}$$

が成り立つ．この B のことを**磁束密度**という[19)]．ここに，ζ は (1.102) で定義される写像であり，κ はその逆写像である．

また，向き付けられた 2 次元曲面の有界領域 σ 上の積分

$$\Phi^{(\mathrm{m})} \overset{\mathrm{def}}{=} \int_\sigma B \tag{4.27}$$

のことを σ を貫く**磁束**という．磁束 $\Phi^{(\mathrm{m})}$ はスカラーであり，t の関数である．

電磁界を速度 $\mathbf{v}$ で運動する電気量 q の点電荷が時刻 t に位置 P にあるとき，電磁界から受ける力 $\mathbf{F}(t,P)$ は，$\mathbf{F}^{(\mathrm{e})}(t,P)$ と $\mathbf{F}^{(\mathrm{m})}(t,P)$ の和で与えられる：

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(t,P) &= \mathbf{F}^{(\mathrm{e})}(t,P) + \mathbf{F}^{(\mathrm{m})}(t,P) \\ &= q\left\{\mathbf{E}(t,P) + \kappa(B(t,P)) \oslash \mathbf{v}(t)\right\}\end{aligned} \tag{4.28}$$

この力を **Lorentz 力**という．

---

19) 磁束密度のこの導入は，空間の向き付けに依拠していない．

磁界内にあって電流が流れていても，その内部では磁束密度 B が 0 に保たれるような導体を**完全導体**という．完全導体を磁界内に持ち込むと，その表面に沿って電流が流れ，これによって発生した磁界が導体の置かれた場所にもともとあった磁界を打ち消して内部では $B=0$ に保たれる．超伝導体は完全導体であるが，この場合の Meissner 効果はその例である．

完全導体でできた極めて細くて，その形状が向き付けられた曲線の有界領域 $\varGamma$ と見なせる物体を磁界内に置くとき，その側面を流れる電流 I を $\varGamma$ に沿う**起磁力**という．また，I を積分値

$$I = \int_{\varGamma} H \tag{4.29}$$

として与える H を**磁場**という．I はスカラーであり，H は S 上の 1− 形式である．I, H は共に t の関数である．

時刻 t に点 P に存在する向き付けられた微小な曲線 $\Delta\varGamma$ に沿う起磁力 ΔI は $\Delta I = H_\alpha(t,P)\Delta x^\alpha$ と表されることになるが，磁場のベクトル $\mathbf{H}(t,P) \stackrel{\text{def}}{=} \kappa(H(t,P))$ の向きと電流 ΔI の向きとは，左ねじの関係にあるようにとるものとする．すなわち，$\mathbf{H}(t,P)$ の方向に左ねじが進むときに電流の流れる方向とねじの回転する向きとが一致するようにとることとする．また，S の正の局所座標系 (x^1,x^2,x^3) を用いて $H = H_\alpha dx^\alpha$ と表し，曲線 $\Delta\varGamma$ の正の側の端点と負の側の端点の座標値の差を $(\Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$ と表した．

$\rho^{(\mathrm{e})}$ は 3− 形式，j, D および B は 2− 形式，E, H は 1− 形式である．したがって，(x^1,x^2,x^3) を任意の局所座標系，(X^1,X^2,X^3) を正規直交座標系とすると，これらの量は以下のように成分表示される：

$$\begin{aligned}\rho^{(\mathrm{e})} &= \frac{1}{3\,!}\rho^{(\mathrm{e})}{}_{\alpha\beta\gamma}dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \\ &= \frac{1}{3\,!}R^{(\mathrm{e})}{}_{abc}dX^a \wedge dX^b \wedge dX^c\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$j = \frac{1}{2\,!}j_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta = \frac{1}{2\,!}j_{ab}dX^a \wedge dX^b \tag{4.31}$$

$$D = \frac{1}{2\,!}D_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta = \frac{1}{2\,!}D_{ab}dX^a \wedge dX^b \tag{4.32}$$

$$B = \frac{1}{2\,!}B_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta = \frac{1}{2\,!}B_{ab}dX^a \wedge dX^b \tag{4.33}$$

$$E = E_\alpha dx^\alpha = E_a dX^a \tag{4.34}$$

$$H = H_\alpha dx^\alpha = H_a dX^a \tag{4.35}$$

電磁場の基礎方程式（Maxwell の方程式）は

$$dB = 0, \quad \frac{\partial B}{\partial t} + dE = 0, \quad dD = \rho^{(\mathrm{e})}, \quad dH - \frac{\partial D}{\partial t} = j \tag{4.36}$$

と表される．t は正の正規座標枠 $[O_T, (\vec{E})]$ における時刻を表す変数である．これら 4 つには各々名前が付けられていて，順に，**磁束密度の Gauss の法則（磁気誘導の法則）**，**Faraday の電磁誘導の法則**，**電束密度の Gauss の法則（静電誘導の法則）**，**Ampère-Maxwell の法則（電流の磁気作用の法則）**という．また，Maxwell の方程式は通例の表示に近い形に

$$\mathrm{div}\mathbf{B} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \mathrm{div}\mathbf{D} = \star\rho^{(\mathrm{e})}, \quad \mathrm{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j} \tag{4.37}$$

と表すこともできる．ここに，$\mathbf{B} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \kappa(\star B)$, $\mathbf{E} = \kappa(E)$, $\mathbf{D} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \kappa(\star D)$, $\mathbf{H} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \kappa(H)$, $\mathbf{j} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \kappa(\star j)$ である．κ は (3.49) で定義される ζ の逆写像 $\kappa \stackrel{\mathrm{def}}{=} \zeta^{-1}$ である．通例は，これらのベクトル場のことを，それぞれ磁束密度，電場，電束密度，磁場，電流密度とよび，$\star\rho^{(\mathrm{e})}$ を電気量密度と称している[20]．

しかし，これまでの議論でみたように，**積分量** $q, I, Q, \Phi^{(\mathrm{m})}$ **をそれぞれ与える密度という意味では，3− 形式** $\rho^{(\mathrm{e})}$**, 2− 形式** j, D, B **のことを電気量密度，電流密度，電束密度，磁束密度とよぶのが自然**であろう．E, H は，それらの曲線 Γ 上の積分がそれぞれ W, I を与える密度量である．また，(4.37) に現れる rot, div にはそれらの定義式 (3.117)，(3.119) からわかるように演算 $\kappa, \star$ が含まれていて，方程式自体がかなり煩雑であるのに対し，(4.36) は簡明である．現れる物理量の自然さおよび式の簡明さという両面から，本書では微分形式 $\rho^{(\mathrm{e})}, j, B, D, E, H$ を場の量としてとり，電磁場の基礎方程式として (4.36) を採用することにする．

Ampère-Maxwell の法則（＝(4.36) の第 4 式）の両辺の外微分をとって，$d^2H = 0$ であることと電束密度の Gauss の法則（＝(4.36) の第 3 式）を用

20）なお，文献 [12] では，「$\mathbf{E}, \mathbf{B}$ が電磁場を記述する基礎的な場であり，これらのことを，それぞれ電場，磁場とよぶべきである．$\mathbf{H}, \mathbf{D}$ は補助的な場であり，これらには名前をつけない方がよい」旨の主張がなされている．この点については 290 頁から始まる「補足的論考」において論及する．

いると，連続の方程式

$$dj + \frac{\partial \rho^{(\mathrm{e})}}{\partial t} = 0 \tag{4.38}$$

が得られる．これは，**電気量の保存則**の微分形での表示である．

次にベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの存在を示そう．磁束密度の Gauss の法則と Poincaré の補題（= 命題 3.8.4）により，$B = dA^{(3)}$ であるような 1– 形式 $A^{(3)}$ が存在する[21]．このことと Faraday の電磁誘導の法則から $d(E + \partial A^{(3)}/\partial t) = 0$ が導かれ，再び Poincaré の補題により，$E + \partial A^{(3)}/\partial t = -d\varphi$ なる 0– 形式 φ が存在する．すなわち

$$B = dA^{(3)}, \qquad E = -d\varphi - \frac{\partial A^{(3)}}{\partial t} \tag{4.39}$$

となる．$\mathbf{A} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \kappa(A^{(3)})$ とおくと，この内容は

$$\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}, \qquad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi \tag{4.40}$$

と表せるが，これは，電磁気学の本で通例目にする表示である[22]．$A^{(3)}, \varphi$ のことをそれぞれ**ベクトルポテンシャル**，**スカラーポテンシャル**という[23]．

以下本部分節の終わりまで，真空中[24] の電磁場について考察する．この場合は「D は E（B は H）に線型に依存しており，かつ $D \oslash E = 0$（$B \oslash H = 0$）という関係がある[25]」ことが実験的に確認されている．したがって，命題 3.6.1 により，D, B に対応して **3– 形式** ε_0, μ_0 **がそれぞれ一意的に定まって**

$$D = E \oslash \varepsilon_0 = \varepsilon_0 \oslash E, \qquad B = H \oslash \mu_0 = \mu_0 \oslash H \tag{4.41}$$

---

21) 部分節 **4.3.1** において，4 次元空間上の 1– 形式 A が現れる．ここでは，それと区別して 3 次元空間上の微分形式であることを示すために，$A^{(3)}$ と記すことにする．

22) (3.112)，(3.117) を参照．

23) 点電荷に作用する力 (4.28) は B, E で決まっており，$A^{(3)}, \varphi$ を直接観測することはできない．したがって，「(古典) 電磁気学の範囲で考えている限りでは，$A^{(3)}, \varphi$ は数学的補助的な量である」といってよい．しかし，電子のような電気量を帯びた量子と電磁場から成る系を問題にすると事情は異なって，$A^{(3)}, \varphi$ は Aharonov-Bohm 効果を通じてその実在性が確認されている．

24) 真空とは，ここでは電磁的性質をもった物質（= 電気分極あるいは磁化を無視できない物質）が存在しない空間のことを指す．

25) この内容は，(4.37) に現れる場の量を用いて標準的教科書におけるのと近い形に「$\mathbf{D}(t, P) \,//\, \mathbf{E}(t, P), \mathbf{B}(t, P) \,//\, \mathbf{H}(t, P)$ が任意の時刻 t，任意の位置 P において成り立っている」と表現することもできる．

と表されることがわかる．ε_0, μ_0 のことを，それぞれ**真空の誘電率**，**真空の透磁率**とよぶ．これらは

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3!}\varepsilon_{(0)\alpha\beta\gamma}dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma = \frac{1}{3!}E_{(0)abc}dX^a \wedge dX^b \wedge dX^c \tag{4.42}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{3!}\mu_{(0)\alpha\beta\gamma}dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma = \frac{1}{3!}M_{(0)abc}dX^a \wedge dX^b \wedge dX^c \tag{4.43}$$

と表されるが，観測によれば，$E_{(0)abc}$，$M_{(0)abc}$ は共に時刻 t にも位置 P にも依存しない正定数である．

(4.41) と電磁気学の標準的教科書における通例の表示との関係をみておく．(X^1, X^2, X^3) を正の正規直交座標系（= 正の正規直交座標枠によって定まる座標系）とすると，$\star D$, $\star B$, $\star\varepsilon_0$, $\star\mu_0$ は

$$\star D = D_a dX^a, \quad \star B = B_a dX^a, \quad \star\varepsilon_0 = E_{(0)123}, \quad \star\mu_0 = M_{(0)123} \tag{4.44}$$

と表される．ここに

$$\left.\begin{array}{l} D_1 \overset{\text{def}}{=} D_{23},\ \ D_2 \overset{\text{def}}{=} D_{31},\ \ D_3 \overset{\text{def}}{=} D_{12} \\ B_1 \overset{\text{def}}{=} B_{23},\ \ B_2 \overset{\text{def}}{=} B_{31},\ \ B_3 \overset{\text{def}}{=} B_{12} \end{array}\right\} \tag{4.45}$$

である．(3.62) と (3.67) を用いて示されるように，(4.41) は

$$\star D = |\varepsilon_0|E, \quad \star B = |\mu_0|H \tag{4.46}$$

と同等である．なお，$|\varepsilon_0| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{K_3(\varepsilon_0, \varepsilon_0)} = E_{(0)123}, |\mu_0| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{K_3(\mu_0, \mu_0)} = M_{(0)123}$ とした．K_3 は (3.63) で定義される 3− 形式の内積を表す．(4.46) の内容は，D_a, B_a, E_a, H_a を用いて，

$$D_a = |\varepsilon_0|E_a, \quad B_a = |\mu_0|H_a \tag{4.47}$$

と表される．

電磁気学の本では，$E_{(0)123} = |\varepsilon_0|, M_{(0)123} = |\mu_0|$ のことを，それぞれ真空の誘電率および真空の透磁率とよんで，これらのことをそれぞれ ε_0, μ_0

と表している場合が多い．そして，(4.47) を真空中における電束密度と電場，磁束密度と磁場の関係と見なして,「真空の誘電率と透磁率は共にスカラーであり，電束密度は電場の誘電率倍，磁束密度は磁場の透磁率倍」として扱われている．本書においては，**誘電率も透磁率も内的必然性をもって 3− 形式として導入されている**ことに注意しよう．

(x^1, x^2, x^3) は任意の局所座標系であるが，(X^1, X^2, X^3) は特殊な局所座標系である．これらの座標系で表したときの成分の間の関係を電気量密度の場合で書くと

$$\rho^{(\mathrm{e})}{}_{\alpha\beta\gamma} = e^a{}_\alpha e^b{}_\beta e^c{}_\gamma R^{(\mathrm{e})}{}_{abc}, \qquad R^{(\mathrm{e})}{}_{abc} = e^\alpha{}_a e^\beta{}_b e^\gamma{}_c \rho^{(\mathrm{e})}{}_{\alpha\beta\gamma} \tag{4.48}$$

となる．ここに

$$e^a{}_\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial X^a}{\partial x^\alpha}, \qquad e^\alpha{}_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial x^\alpha}{\partial X^a} \tag{4.49}$$

とした．なお，次式が成り立つ：

$$e^a{}_\alpha e^\alpha{}_b = \delta^a{}_b, \quad e^\alpha{}_a e^a{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta, \quad g_{\alpha\beta} = e^a{}_\alpha \delta_{ab} e^b{}_\beta, \quad g^{\alpha\beta} = e^\alpha{}_a \delta^{ab} e^\beta{}_b \tag{4.50}$$

ただし，$g_{\alpha\beta}(P) \stackrel{\mathrm{def}}{=} g((\partial/\partial x^\alpha)_P, (\partial/\partial x^\beta)_P), \forall P \in S$ であり，$(g^{\alpha\beta})$ は $(g_{\alpha\beta})$ の逆行列を表す．

(4.41) の内容を $D_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{(0)\alpha\beta\gamma}$, $\mu_{(0)\alpha\beta\gamma}$, E_α, H_α を用いて表すと，

$$D_{\alpha\beta} = \varepsilon_{(0)\alpha\beta\gamma} E^\gamma, \qquad B_{\alpha\beta} = \mu_{(0)\alpha\beta\gamma} H^\gamma \tag{4.51}$$

となる．ただし，$E^\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} g^{\alpha\beta} E_\beta, H^\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} g^{\alpha\beta} H_\beta$ とした．これはまた

$$D = |\varepsilon_0| \star E, \qquad B = |\mu_0| \star H \tag{4.52}$$

と同等である．

電場 E，磁束密度 B の従う**波動方程式**について述べる．E は 1− 形式であるから，(3.126) により

$$\Delta E = d \star d \star E - \star d \star dE \tag{4.53}$$

となるが，この式の右辺に (4.52) の第 1 式，電束密度の Gauss の法則および Faraday の電磁誘導の法則（$=$(4.36) の第 2 式）を用いると，

$$\Delta E = \frac{1}{|\varepsilon_0|} d \star \rho^{(e)} + \star d \frac{\partial}{\partial t}(\star B) \tag{4.54}$$

となる．ここで，さらに (4.46) と Ampère-Maxwell の法則を用いると，E に対する波動方程式

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) E = c^2 |\mu_0| d \star \rho^{(e)} + |\mu_0| \frac{\partial}{\partial t}(\star j) \tag{4.55}$$

が導かれる．ここに

$$c \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{K_3(\varepsilon_0, \mu_0)}} = \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon_0||\mu_0|}} = \frac{1}{\sqrt{E_{(0)123} M_{(0)123}}} \tag{4.56}$$

とした．この式から容易に導かれるように，D に対する波動方程式は

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) D = \star d \star \rho^{(e)} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial j}{\partial t} \tag{4.57}$$

である．

Ampère-Maxwell の法則から，

$$|\mu_0| dH - |\mu_0| \frac{\partial D}{\partial t} = |\mu_0| j \tag{4.58}$$

となる．一方，(4.46) の第 2 式の両辺の外微分をとり $d|\mu_0| = dM_{(0)123} = 0$ を用いると，$d \star B = |\mu_0| dH$ を得る．これを (4.58) に用いると

$$d \star B - |\mu_0| \frac{\partial D}{\partial t} = |\mu_0| j \tag{4.59}$$

を得るが，この両辺に $\star$ を作用させ，さらに d を施すと次式が得られる：

$$d \star d \star B - |\mu_0| d \left(\frac{\partial}{\partial t}(\star D)\right) = |\mu_0| d \star j \tag{4.60}$$

ところで，ラプラシアンの定義（$=$ 定義 3.8.1）および磁束密度の Gauss の法則（$=$(4.36) の第 1 式）により

$$\Delta B = \star d \star dB - d \star d \star B = -d \star d \star B \tag{4.61}$$

が得られ，また (4.52) の第 1 式，(4.56) および Faraday の電磁誘導の法則を用いることにより，

$$|\mu_0|d\left(\frac{\partial}{\partial t}(\star D)\right)=|\mu_0||\varepsilon_0|\frac{\partial dE}{\partial t}=-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \tag{4.62}$$

が示される．(4.60)〜(4.62) より，波動方程式

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)B=-|\mu_0|d\star j \tag{4.63}$$

を得る．また，この式から H に対する波動方程式 $\left\{\Delta-(1/c^2)\partial^2/\partial t^2\right\}H=-\star d\star j$ が導かれる．

ポテンシャル $\varphi, A^{(3)}$ の満足する波動方程式を導こう．$D=E_{(0)abc}E^a\, dX^b\wedge dX^c/2!$ であるから，(4.39) の第 2 式と (3.123)，(3.124) を用いると

$$dD=(\star d\star E)\varepsilon_0=-\left(\frac{\partial(\star d\star A^{(3)})}{\partial t}+\Delta\varphi\right)\varepsilon_0 \tag{4.64}$$

となる．ここで，**Lorenz 条件**[26)]

$$\mathrm{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\star d\star A^{(3)}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{4.65}$$

を課すと

$$dD=-\left\{\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi\right\}\varepsilon_0 \tag{4.66}$$

となる．したがって，電束密度の Gauss の法則より，

$$\left\{\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi\right\}\varepsilon_0=-\rho^{(\mathrm{e})} \tag{4.67}$$

となる．この式の両辺と 3− 形式 μ_0 の内積をとり (4.56) を用いると，波動方程式

$$\left(\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=-c^2K_3(\mu_0,\rho^{(\mathrm{e})}) \tag{4.68}$$

を得る．

---

26) (4.65) は通例 Lorentz 条件とよばれている．この呼称は妥当でないことを筆者は文献 [13] によって知った．

次に，$A^{(3)}$ について考える．(4.52) の第 2 式と (4.39) の第 1 式により，$|\mu_0| \star H = dA^{(3)}$ となるが，これに (3.62) を用いると $|\mu_0| H = \star dA^{(3)}$ が導かれる．この式と $d|\mu_0| = 0$ であることにより次式が得られる：

$$|\mu_0| \star dH = \star(|\mu_0| dH) = \star(d \star dA^{(3)}) \tag{4.69}$$

また，(4.46) の第 1 式と (4.39) の第 2 式から

$$|\mu_0| \frac{\partial}{\partial t}(\star D) = \frac{1}{c^2}\left[-\frac{\partial^2 A^{(3)}}{\partial t^2} - d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)\right] = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^{(3)}}{\partial t^2} + d(\star d \star A^{(3)}) \tag{4.70}$$

が導かれる．ここで，(4.56) と Lorenz 条件を用いた．(4.69)，(4.70)，Ampère-Maxwell の法則および (3.126) から

$$\begin{aligned} |\mu_0| \left\{\star\left(dH - \frac{\partial D}{\partial t}\right)\right\} &= \star(d \star dA^{(3)}) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^{(3)}}{\partial t^2} - d(\star d \star A^{(3)}) \\ &= -\Delta A^{(3)} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A^{(3)}}{\partial t^2} = |\mu_0| \star j \end{aligned} \tag{4.71}$$

となり，結局

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) A^{(3)} = -|\mu_0| \star j \tag{4.72}$$

を得る．

波動方程式 (4.68)，(4.72) は Lorenz 条件を前提としている．ここで，物理的一般性を損ねることなくこの条件を課すことができることを示しておこう．B, E の表示 (4.39) は変換

$$A^{(3)\prime} = A^{(3)} + d\lambda, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \tag{4.73}$$

のもとで不変である：

$$\begin{aligned} B' &= dA^{(3)\prime} = dA^{(3)} = B \\ E' &= -d\varphi' - \frac{\partial A^{(3)\prime}}{\partial t} = -d\varphi - \frac{\partial A^{(3)}}{\partial t} = E \end{aligned} \tag{4.74}$$

ここに λ は物理的空間 S 上の任意の実数値関数で，時刻 t の関数でもあるものとする．変換 (4.73) をゲージ変換という．$A^{(3)\prime}, \varphi'$ は $A^{(3)}, \varphi$ と同一の磁束密度 B，電場 E を与えており，互いに物理的に同値である．

$A^{(3)}, \varphi$ が勝手に与えられたとき，Lorenz 条件は必ずしも満足されない．しかし，λ として

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\lambda = f(ct, x^1, x^2, x^3) \stackrel{\text{def}}{=} -\star d \star A^{(3)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{4.75}$$

を満足するものをとれば，$A^{(3)\prime}, \varphi'$ は Lorenz 条件を満足する．これらの $A^{(3)\prime}, \varphi'$ を改めて $A^{(3)}, \varphi$ と記すことにすれば，Lorenz 条件 (4.65) を満足する $A^{(3)}, \varphi$ が得られる．なお，正の正規直交座標枠 $[O; (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)]$ によって定まる正規直交座標系 (X^1, X^2, X^3) を用いて λ を $\lambda(ct, X^1, X^2, X^3)$ と表したとき，

$$\lambda(ct, X^1, X^2, X^3) = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{f\left(ct \pm |\mathbf{X} - \mathbf{X}'|, \mathbf{X}'\right)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}'|} dX'^1 \wedge dX'^2 \wedge dX'^3 \tag{4.76}$$

で与えられる λ は (4.75) の解である．ここに，$\mathbf{X} \stackrel{\text{def}}{=} X^\alpha \mathbf{E}_\alpha$, $\mathbf{X}' \stackrel{\text{def}}{=} X'^\alpha \mathbf{E}_\alpha$, $|\mathbf{X} - \mathbf{X}'| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{a=1}^{3}(X^a - X'^a)^2}$ である．

次に，**電磁場のエネルギー**，**電磁場の運動量**，電磁場の角運動量およびそれらを積分値として与える密度量について考察しよう．

(4.36) の第 2 式と H との外積をつくり，また (4.36) の第 4 式と E との外積をつくることによって，

$$\frac{\partial B}{\partial t} \wedge H = -dE \wedge H, \quad j \wedge E + \frac{\partial D}{\partial t} \wedge E = dH \wedge E \tag{4.77}$$

が得られる．これらを辺々加えると

$$j \wedge E + \left(\frac{\partial D}{\partial t} \wedge E + \frac{\partial B}{\partial t} \wedge H\right) = -d(E \wedge H) \tag{4.78}$$

となる．ここで，$dH \wedge E = E \wedge dH$ であることと命題 3.8.2 を用いた．D, B は (4.41) で与えられ，ε_0, μ_0 はいずれも時刻に依存しないので，

$$\frac{\partial D}{\partial t} \wedge E = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(D \wedge E), \quad \frac{\partial B}{\partial t} \wedge H = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(B \wedge H) \tag{4.79}$$

が成り立つ．したがって，

$$j \wedge E + \frac{\partial u}{\partial t} = -ds \tag{4.80}$$

となる．ここに[27]

$$u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(D \wedge E + B \wedge H), \qquad s \stackrel{\text{def}}{=} E \wedge H \tag{4.81}$$

とおいた．(4.80) の左辺第 1 項は電磁場中を電流が流れることによって単位時間に発生する熱（＝Joule 熱）の密度を表し，第 2 項は**電磁場のエネルギー密度** u の時間的変化率を表す．s は**電磁場のエネルギーの流れの密度**を表し，これを **Poynting の 2– 形式**とよぶ．(4.80) を**エネルギーのつり合いの式**という．

(4.80) を S の滑らかな境界 ∂V をもつ有界領域 V 上で積分して適宜移項することにより，

$$\frac{d}{dt}\int_V u = -\int_V j \wedge E - \int_{\partial V} s \tag{4.82}$$

が導かれる．なお，Stokes の定理（＝命題 3.10.5）を用いた．この式の左辺は V 内にある電磁場のエネルギーの時間的変化率であり，右辺の $\int_V j \wedge E$ と $\int_{\partial V} s$ は，それぞれ V 内に単位時間に発生する Joule 熱および V の境界 ∂V を通って単位時間に V から出て行く電磁場のエネルギーを表す．

電磁場中に連続的に分布している電気量，電流に作用する力を考察することにより，電磁場の応力，運動量密度の表式を導こう．

電気量密度 $\rho^{(e)}$ で表される電気量の分布があって，この分布の各点 P における速度 $\mathbf{V}_P$ を与えるベクトル場 $\mathbf{V}$ があるとき，電流密度は

$$j = i(\mathbf{V})\rho^{(e)} = \zeta(\mathbf{V}) \oslash \rho^{(e)} = \rho^{(e)} \oslash \zeta(\mathbf{V}) \tag{4.83}$$

で与えられる．ここに，$i(\mathbf{V})\rho^{(e)}$ は $\mathbf{V}$ と $\rho^{(e)}$ の内部積を表す，また点 P にある単位体積の荷電物質（= 電気量，電流の担い手）に作用する電磁力は，反変ベクトル場値 3– 形式

$$\mathbf{f} = \{\mathbf{E} - \mathbf{V} \oslash \kappa(B)\} \otimes \rho^{(e)} = \{\mathbf{E} + \kappa(B) \oslash \mathbf{V}\} \otimes \rho^{(e)} \tag{4.84}$$

の点 P における値 $\mathbf{f}_P$ で与えられる．ここに ζ は (3.49) で定義された，反変テンソル場を共変テンソル場に写す写像であり，κ は ζ の逆写像である．

---

[27] 本書では，エネルギー密度，運動量密度に対して，電磁場についても Newton 力学におけるのと同一の記号を用いるが，混乱は起こらないものと思う．

$\mathbf{f}$ を有界領域 V 上で積分したものは，V 内にある荷電物質に作用する電磁力になる．その意味で，$\mathbf{f}$ は「荷電物質に作用する電磁力の密度」を表している．(3.67) の第 2 式と j の表示 (4.83) を用いると

$$\begin{aligned}\{\mathbf{V} \oslash \kappa(B)\} \otimes \rho^{(\mathrm{e})} &= \kappa\{(\star j) \oslash B\} \otimes (\star 1) = -\kappa[\star\{(\star j) \wedge \star B\}] \otimes (\star 1) \\ &= \frac{1}{3\,!}(j^a{}_b B_{cd} + j^a{}_d B_{bc} + j^a{}_c B_{db})\mathbf{E}_a \otimes (dX^b \wedge dX^c \wedge dX^d) \qquad (4.85)\end{aligned}$$

であることが示される．なお，$j^a{}_b \overset{\mathrm{def}}{=} \delta^{ac} j_{cb}$ である．したがって

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} \otimes \rho^{(\mathrm{e})} - \kappa\{(\star j) \oslash B\} \otimes (\star 1) \qquad (4.86)$$

となる．この式は，電束密度の Gauss の法則と Ampère-Maxwell の法則を用いて $\rho^{(\mathrm{e})}, j$ を D, H で表すことにより，

$$\mathbf{f} = \mathbf{E} \otimes dD - \kappa\left\{(\star dH) \oslash B - \frac{\partial(\star D)}{\partial t} \oslash B\right\} \otimes (\star 1) \qquad (4.87)$$

と書き換えられる．D と E との関係（= (4.41) の第 1 式）を用いると

$$\mathbf{E} \otimes dD = d\mathbf{T}^{(\mathrm{e})} - \kappa(E \oslash dE) \otimes \varepsilon_0 \qquad (4.88)$$

が得られる．ただし，$\mathbf{T}^{(\mathrm{e})}$ は (x^1, x^2, x^3) を局所座標系として

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{T}^{(\mathrm{e})} &\overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\,!} T^{(\mathrm{e})\alpha}{}_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \otimes (dx^\beta \wedge dx^\gamma) \\ T^{(\mathrm{e})\alpha}{}_{\beta\gamma} &\overset{\mathrm{def}}{=} g^{\alpha\delta} T^{(e)}{}_{\delta\beta\gamma} \\ T^{(\mathrm{e})}{}_{\alpha\beta\gamma} &\overset{\mathrm{def}}{=} E_\alpha D_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} K_1(E, E)\varepsilon_{(0)\alpha\beta\gamma}\end{aligned}\right\} \qquad (4.89)$$

によって定義される反変ベクトル場値 2− 形式であり，電場による応力テンソル場である．なお，K_1 は (3.63) で定義される内積である．(4.88) の右辺第 2 項を，Faraday の電磁誘導の法則および D と E の関係式（= (4.46) の第 1 式）を用いて D と B によって表すことにより，次式を得る：

$$\mathbf{E} \otimes dD = d\mathbf{T}^{(\mathrm{e})} + \kappa\left\{(\star D) \oslash \frac{\partial B}{\partial t}\right\} \otimes (\star 1) \qquad (4.90)$$

また，磁束密度の Gauss の法則と B と H の関係式（= (4.46) の第 2 式）を用いると，

$$-\kappa\{(\star dH) \oslash B\} \otimes (\star 1) = d\mathbf{T}^{(\mathrm{m})} \qquad (4.91)$$

を得る．$\mathbf{T}^{(\mathrm{m})}$ は磁場による応力テンソル場である．ただし，

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{T}^{(\mathrm{m})} &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2!} T^{(\mathrm{m})\alpha}{}_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \otimes (dx^{\beta} \wedge dx^{\gamma}) \\ T^{(\mathrm{m})\alpha}{}_{\beta\gamma} &\overset{\text{def}}{=} g^{\alpha\delta} T^{(\mathrm{m})}{}_{\delta\beta\gamma} \\ T^{(\mathrm{m})}{}_{\alpha\beta\gamma} &\overset{\text{def}}{=} H_{\alpha} B_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} K_1(H, H) \mu_{(0)\alpha\beta\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{4.92}$$

である．(4.87)，(4.90) および (4.91) より，$\mathbf{f}$ の表示として結局

$$\mathbf{f} = d\mathbf{T} - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \tag{4.93}$$

が得られる．ここに，

$$\mathbf{T} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{T}^{(\mathrm{e})} + \mathbf{T}^{(\mathrm{m})}, \quad \mathbf{p} \overset{\text{def}}{=} -\kappa\{(\star D) \oslash B\} \otimes (\star 1) \tag{4.94}$$

とおいた．(4.93) の両辺を滑らかな境界をもつ有界領域 V 上で積分して，$d\mathbf{T}$ の積分に対して反変テンソル場値微分形式に対する Stokes の定理（= 命題 3.11.1）を用い，左右の項を適宜移項することによって，

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{p} = \int_{\partial V} \mathbf{T} - \int_V \mathbf{f} \tag{4.95}$$

が導かれる．なお，(4.95) における積分は，反変ベクトル場値微分形式 $\mathbf{p}, \mathbf{T}, \mathbf{f}$ をそれぞれ $\mathbf{p} = \mathbf{e}_{\alpha} \otimes p^{\alpha}$, $\mathbf{T} = \mathbf{e}_{\alpha} \otimes T^{\alpha}$, $\mathbf{f} = \mathbf{e}_{\alpha} \otimes f^{\alpha}$ と表して，定義 3.11.4 の仕方で定義されているものである．ここに $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ は物理的空間（3 次元 Euclid 空間）$\mathcal{S} = \{S; V_{oS}\}$ の同伴線型空間 V_{oS} の基底を表し[28)]，p^{α}, T^{α} および f^{α} はいずれも（実数値）微分形式である．

(4.95) の右辺第 1 項は，境界面 ∂V において V の外部の電磁場から内部の電磁場に作用する圧力の総和を表し，$-\int_V \mathbf{f}$ は電磁場が V 内の荷電物質に及ぼす力の総和 $\int_V \mathbf{f}$ の反作用であって，これらの荷電物質から V 内の電磁場に作用する力の総和である．したがって，左辺は V 内の電磁場の運動量の時間的変化率を表すものと考えられ，$\mathbf{p}$ は**電磁場の運動量密度**ということになる．また，反変ベクトル場値 2– 形式 $\mathbf{T}$ は**電磁場の応力**を表す．

---

28) これらの反変ベクトル場値微分形式を表す際の基底として $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ をとれることについては，命題 3.1.3 に続く議論を参照のこと．

(4.93) を**運動量のつり合いの式**という．なお，(3.67) の第 2 式，(4.46) および (4.56) を用いると，$\mathbf{p}$ の Poynting の 2– 形式 s による表示が得られる：

$$\mathbf{p} = \frac{1}{c^2}\kappa\{\star(E \wedge H)\} \otimes (\star 1) = \frac{1}{c^2}\kappa(\star s) \otimes (\star 1) \qquad (4.96)$$

次に，電磁場の角運動量について考えよう．空間 $\mathcal{S}$ の任意の 1 定点 A_S と座標枠 $[O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)]$ をとる．空間内の任意の点 P の位置ベクトルを $\mathbf{X} \overset{\mathrm{def}}{=} \overrightarrow{O_S P} = x^\alpha \mathbf{e}_\alpha$，$A_S$ の位置ベクトルを $\mathbf{A} \overset{\mathrm{def}}{=} \overrightarrow{O_S A_S}$ として[29)]，

$$\mathcal{L}^{(3)} \overset{\mathrm{def}}{=} (\mathbf{X} - \mathbf{A}) \curlywedge \mathbf{p} = \frac{1}{2!}(\mathbf{e}_\alpha \curlywedge \mathbf{e}_\beta) \otimes (x^a p^\beta - x^\beta p^\alpha) \qquad (4.97)$$

で定義される 2 階交代反変テンソル場値 3– 形式 $\mathcal{L}^{(3)}$ を考える．(4.89), (4.92)，(4.93) および (4.94) の第 1 式を用いると，

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial t} = d\{(\mathbf{X} - \mathbf{A}) \curlywedge \mathbf{T}\} - (\mathbf{X} - \mathbf{A}) \curlywedge \mathbf{f} \qquad (4.98)$$

を導くことができる．この両辺を滑らかな境界をもつ有界領域 V 上で積分して，反変テンソル場値微分形式に対する Stokes の定理を用いると，

$$\frac{d}{dt}\int_V \mathcal{L}^{(3)} = \int_{\partial V} (\mathbf{X} - \mathbf{A}) \curlywedge \mathbf{T} - \int_V (\mathbf{X} - \mathbf{A}) \curlywedge \mathbf{f} \qquad (4.99)$$

が得られる．右辺第 1 項は境界 ∂V において V の外部の電磁場から内部の電磁場に作用する圧力の点 A_S の周りのモーメントの総和，右辺第 2 項は電磁場が V 内の荷電物質におよぼす力の A_S の周りのモーメントの総和を表す．したがって，左辺は V 内にある**電磁場の A_S の周りの角運動量** $L^{(3)}(V) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_V \mathcal{L}^{(3)}$ の時間的変化率を表すものと考えられる．$\mathcal{L}^{(3)}$ を**電磁場の A_S の周りの角運動量密度**とよび，(4.98) を**角運動量のつり合いの式**という．

以上，電磁気学の基礎を微分形式の枠組みで記述するという方針のもとに，そこに現れる基本量のテンソル性を中心に検討してきた．我々は，諸

29)　$\mathbf{p}$ は反変ベクトル場値 3– 形式である，$(\mathbf{X} - \mathbf{A}) \curlywedge \mathbf{p}$ は反変ベクトル $\mathbf{X} - \mathbf{A}$ と $\mathbf{p}$ の反変ベクトル部分同士の外積を意味する．$(\mathbf{X} - \mathbf{A}) \curlywedge \mathbf{f}$ も同様の意味である．以下の電磁場の角運動量の議論では同様の外積が頻出するが，$\curlywedge$ を交代共変テンソル部分についての外積演算の記号 $\wedge$ と混同しないように．

量を物理的空間 S 上の微分形式でかつ時刻 t に可微分的に依存するものとして扱い，電磁場の基礎方程式が (4.36) と表されることをみた．この方程式およびそれから導かれる諸関係はすべて，S の上の関係式としてはその座標枠のとり方に依存しないこと（すなわち**座標枠の時刻に依存しない変換のもとで不変**であること）は明らかである．

ところで，Newton 力学における **Galilei 変換は S の座標枠の時刻に依存する変換**であり，このような変換のもとでも電磁気学の法則が不変であるか否かは，これまでの議論ではわからない．$\rho^{(e)}, \varepsilon_0, \mu_0, j, D, B, E, H, A^{(3)}, \varphi$ の，この種の変換のもとでの変換性は未検討だからである．

そこで，相対論の建設に先立つ Hertz の試行にならって，「$\rho^{(e)}, j, D, B, E, H, A^{(3)}, \varphi$ はすべて Galilei 変換のもとで不変である」と仮定して[30] 電磁気学と Newton 力学との整合性を調べよう．観測によれば，電磁力のみを受けて運動する物体の質量は時間的に一定である．そこで Newton の運動方程式 (4.14) において，右辺の $\mathbf{F}$ が (4.28) で与えられる場合，この力の Galilei 変換のもとでの変換性をみておこう．

変換 $[O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)] \longrightarrow [O'_S; (\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3)]$ が Galilei 変換である場合は，$b^\alpha(t)$ を $db^\alpha(t)/dt = u^\alpha =$ 一定なる t の関数，$(a^\beta{}_\alpha)$ を t に依存しない正則行列として，$\mathbf{b} \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{O'_S O_S} = b^\alpha(t)\mathbf{e'}_\alpha$, $\mathbf{e}_\alpha = a^\beta{}_\alpha \mathbf{e'}_\beta$ が成り立つ．このとき，点電荷の $[O_S; (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)]$ および $[O'_S; (\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3)]$ における速度をそれぞれ $\mathbf{v}(t), \mathbf{v'}(t)$ と表すと，$\mathbf{v'}(t) = \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}$ である．ここに，$\mathbf{u} \overset{\text{def}}{=} u^\alpha \mathbf{e'}_\alpha$ である．先ほど述べた仮定によれば，q, $\mathbf{E}(t,P)$, $\kappa(B(t,P))$ はすべて Galilei 変換のもとで不変であるから，(4.28) で与えられる力 $\mathbf{F}(t,P)$ は，この変換のもとで

$$\mathbf{F'}(t,P) = \mathbf{F}(t,P) - q\mathbf{u} \oslash \kappa(B(t,P)) \tag{4.100}$$

と変換することとなる．すなわち，Lorentz 力 $\mathbf{F}(t,P)$ は Galilei 変換のもとで不変ではない．

かくて，「点電荷に作用する電磁力が (4.28) で与えられ，その質量が時間的に一定であり，かつ $\rho^{(e)}, E, B$ がすべて Galilei 変換のもとで不変である」という前提を置く限り，点電荷に対する Newton の運動方程式は Galilei 不

---

[30] D, B, E, H がすべて Galilei 変換のもとで不変であれば，ε_0, μ_0 もこの変換のもとで不変である．

変ではないこと，したがってこの場合の運動方程式は整合性をもたないことがわかった．さらに，容易に確かめられるように，Faraday の電磁誘導の法則，Ampère-Maxwell の法則，波動方程式 (4.55)，(4.63)，(4.68) および (4.72) も Galilei 変換のもとで不変ではない．

なお，2 個の点電荷 a, b が運動しているとき，それらがつくり出す電磁場を媒介として，a, b の間には力がはたらく．この力は (4.28) に基づいて計算されるが，これについては作用反作用の法則は成立しないかのようにみえる．しかし，点電荷 a, b および電磁場の系全体を考えると，作用反作用の法則が成り立っていることが示される．

電磁気学についての上述の結果は次のようにまとめられる：

(A) 電気量密度 $\rho^{(\mathrm{e})}$，真空の誘電率 ε_0 および真空の透磁率 μ_0 はすべて 3− 形式，電流密度 j，電束密度 D および磁束密度 B はすべて 2− 形式，電場 E，磁場 H およびベクトルポテンシャル $A^{(3)}$ はすべて 1− 形式，スカラーポテンシャル φ は 0− 形式である．

(B) エネルギー密度 u は 3− 形式，運動量密度 $\mathbf{p}$ は反変ベクトル場値 3− 形式，エネルギーの流れの密度 s は 2− 形式，応力 $\mathbf{T}$ は反変ベクトル場値 2− 形式，角運動量密度 $\mathcal{L}^{(3)}$ は 2 階交代反変テンソル場値 3− 形式である．

(C) Maxwell の方程式は (4.36) で与えられる．電磁場中での荷電物質が受ける力（Lorentz 力）は (4.28)（あるいは (4.84)）で与えられる．

(D) $\rho^{(\mathrm{e})}, j, D, B, E, H, A^{(3)}, \varphi$ が Galilei 変換のもとで不変であると仮定する限り，点電荷に作用する電磁力が (4.28) で与えられるということと点電荷に対する Newton の運動方程式 (4.12) とは整合性をもたない．また，Maxwell の方程式のうち，Faraday の電磁誘導の法則，Ampère-Maxwell の法則，波動方程式 (4.55)，(4.63)，(4.68)，(4.72) も Galilei 変換のもとで不変でない．

力学においても，電磁気学においてもエネルギー密度は 3− 形式，運動量密度は反変ベクトル場値 3− 形式である．したがって当然のことながら，

質点系と電磁場が共存する系でのエネルギー密度，運動量密度およびそれらの積分量であるエネルギー，運動量が定義されることとなる[31]．

ベクトル解析における回転，発散は単なる外微分ではなく，κ, $\star$ をも含んでいて，かなり煩雑である．それらを用いて表現されている方程式 (4.37) も煩雑である．

一方，Maxwell の方程式 (4.36) は，そこに現れる物理量はすべて微分形式であり，微分演算も空間部分については外微分であって，これらは (4.37) と比べると格段にスマートである．しかし，(4.36) にも**時刻に関する微分という，外微分とは異質で時間 $\mathcal{T}$ の座標枠のとり方に依存する演算が現れており**[32]**，また Lorentz 力の磁束密度に関わる部分は速度と場の値の演算積で表されるのに対し，電場に関わる部分はそれとは異質の表示になっている等,「スマートさも中ぐらいなり」**である．

さらに，**(D) で述べたことはより本質的な難点である.「スマートさも中ぐらい」ということと「理論の整合性の欠如」という欠陥とは互いに関係があるのであって，その根本的解決は特殊相対論によってなされた**[33]**．この理論は，4 次元 Minkowski 空間上の理論として力学と電磁気学を定式化することにより，これらの難点のすべてを克服した**のである．

4.2 Minkowski 時空

4.2.1 Minkowski 時空

前節では，物理的時間は向き付けられた 1 次元 Euclid 空間，物理的空間は 3 次元の向き付けられた 3 次元 Euclid 空間であるという前提のもとに,「Newton 力学と Maxwell の電磁気学をできるだけ整理した形で定式化する」という方針で議論を進めた．

---

[31] 仮に，エネルギー密度，運動量密度のテンソル性が両理論で異なっているものとすると,「共存系のエネルギー，運動量は定義されない」ことになってしまう．

[32] 質点の運動方程式 (4.12) もこの点では同じである．

[33] Hertz の試行以後相対論提唱以前の理論としては，Lorentz によるものがある．これは，変換として Galilei 変換に修正を加えたものを採用して「D, B, E, H が，この変換のもとで，座標枠間の相対速度 $\mathbf{u}$ に線型に依存する項だけの変換を受ける」とするものである．この理論では，$\mathbf{u}$ について 2 次以上の項を無視する近似の範囲でのみ整合性が保証される．Hertz の理論および Lorentz の理論については，文献 [12], [13], [15] 等を参照のこと．

これまでにわかった範囲では，Newton 力学においては「物体の空間的位置の時間的変化」を問題にしており，また電磁気学においては,「諸量は空間 S 上のテンソル場であり，かつ時刻 t に可微分的に依存するもの」であって，時間と空間とは数学的にも異質のものとして機能している．一方,「Newton 力学における Galilei 変換は S の座標枠の時間に依存する変換」であり，そこでは，時間と空間とは相互に深く関わり合うものとして扱われている．Newton 力学と（相対論以前の）電磁気学における時間－空間の概念は全体としてモヤモヤとしていて明快さに欠けているといわざるを得ない．**Einstein は，電磁気学の法則から時間－空間の 4 次元的構造を読みとることにより，このモヤモヤを晴らした**のである．

真空中の電磁場の満足する波動方程式 (4.55)，(4.63)，(4.68) および (4.72) における演算子

$$\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{4.101}$$

に着目する．ここに，第 1 項目の Δ は 3 次元 Euclid 空間 S におけるラプラシアンを表す．正規直交座標系 (X^1, X^2, X^3) を用いると第 3 章の **3.12** 節における議論からわかるように，Δ は

$$\Delta = \sum_{a=1}^{3} \frac{\partial^2}{(\partial X^a)^2} \tag{4.102}$$

と表示される．これは S の計量が $\sum_{a=1}^{3} dX^a \otimes dX^a$ であることに対応している．そこで,「(4.101) をラプラシアンとするアフィン空間は何か」ということを考えてみると，(4.101) と Minkowski 計量の対比から,「時間と空間とを合わせた空間は時空的に向き付けられた 4 次元 Minkowski 空間 $\mathcal{M}_4 \overset{\mathrm{def}}{=} \{M_4; V_{o4}\} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{M}^{(1,3)} = \{M; V^{(1,3)}\} = \{T \times S, V_{oT} \oplus V_{oS}\}$ である[34]」とすることに思い至る．この空間におけるラプラシアンを $\Box$ と記して，(X^0, X^1, X^3, X^3) を $\mathcal{M}_4$ の任意の正規直交座標系として，$\Box$ のこの座標系における具体的表示を求めてみよう．

定義 3.8.1 で考えると，$\mathcal{M}_4$ については $\mathrm{d}=4, a=1$ であるから，M_4 上の $q-$ 形式 ω に対して，

$$\Box\omega = -d \star d \star \omega - \star d \star d\omega \tag{4.103}$$

[34] 定義 1.3.6，2.2.1 を参照．

となる．ω が M_4 上の 0− 形式である場合，これを φ で表すと，$\star\varphi$ は 4− 形式であり，したがって $d\star\varphi=0$ となり，また

$$\star d\star d\varphi=-\eta^{ij}\frac{\partial^2}{\partial X^i\partial X^j}\varphi \tag{4.104}$$

である．ただし，M_4 の計量 g を命題 1.3.27 のすぐ前の記述の流儀に沿って，$g=\eta_{ij}dX^i\otimes dX^j$ と表した．よって，(4.103) より

$$\Box\varphi=\left\{\sum_{a=1}^{3}\frac{\partial^2}{(\partial X^a)^2}-\frac{\partial^2}{(\partial X^0)^2}\right\}\varphi \tag{4.105}$$

となる．$q=1,2,3,4$ である場合についても同様に計算されて，一般に任意の q− 形式 ω について，

$$\Box\omega=\eta^{ij}\frac{\partial^2}{\partial X^i\partial X^j}\omega=\left\{\sum_{a=1}^{3}\frac{\partial^2}{(\partial X^a)^2}-\frac{\partial^2}{(\partial X^0)^2}\right\}\omega \tag{4.106}$$

が成り立つ．そこで，$X^0=ct$ とすると，正規直交座標系 $(X^0,X^1,X^2,X^3)=(ct,X^1,X^2,X^3)$ においては，

$$\Box=\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{4.107}$$

となる[35)]．

かくて，**演算子 $\Delta-(1/c^2)\partial^2/\partial t^2$ は，4 次元 Minkowski 空間におけるラプラシアンの正規直交座標系 (ct,X^1,X^2,X^3) による表示である**ことがわかった．このラプラシアン $\Box$ を**ダランベールシャン**（**d'Alembertian**）という．ダランベールシャンは，その定義から明らかなように正規直交座標系のみならず，どのような局所座標系にも依存しない演算子である．ただし，$\Box$ の表示が (4.106) の形になるのは，正規直交座標系についてのみである．

かくて，「**時間と空間を合わせたものは，時空的−時間的−空間的に向き付けられた 4 次元 Minkowski 空間である**[36)]」と考えるのが自然であることがわかった．この 4 次元空間を **Minkowski 時空**とよぶ．

---

35) (4.105)〜(4.107) は，(X^0,X^1,X^2,X^3) の向きの正負によらずに成り立つ．

36) 定義 2.2.1 を参照．

なお，以下では，3 次元物理の場合と同様に，Minkowski 時空を「時間的向きは，物理的時間の未来方向が正であるように指定され，また空間的向きは右手系が正であるように指定されているもの」として扱う．

Newton 力学と Maxwell の電磁気学においては，時間，空間は，それぞれ向き付けられた 1 次元 Euclid 空間，向き付けられた 3 次元 Euclid 空間であって，物理量は 3 次元 Euclid 空間におけるテンソル量であり，物理法則はそれらのテンソル量に関する方程式として表されていた．このことと，時間－空間についてのこれまでの議論を踏まえ，基本的前提として次のことを置く：**時間と空間を合わせたものは Minkowski 時空であり，物理量はすべてこの時空におけるテンソル量であって，物理法則はこれらの量に関する方程式である**[37)]．

以下，この前提に基づいて理論を展開しよう．

慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ による $\mathcal{M}_4$ の Minkowski 分解を $\{M_{4\vec{E}_0} \times M_{4S^3(\vec{E}_0)}; V_{o4}\}$ と表す．第 2 章の部分節 **2.2.3** における議論によれば，実数 X^0 を 1 つ定めて，$M_4(X^0) \overset{\text{def}}{=} \{O + X^0\vec{E}_0 + \mathbf{x} | \mathbf{x} \in S^3(\vec{E}_0)\}$ とおくと，$\{M_4(X^0); S^3(\vec{E}_0)\}$ は 3 次元 Euclid 空間であって，この空間のことを慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ の時刻 $t = X^0/c$ における空間とよぶのであった．その段階では，物理的意味を含ませないで単にそうよんだのである．しかし，本章で考えている $\mathcal{M}_4$ は物理的時間－空間であって，時刻，時間は単なる記号ではなく，それぞれ**物理的時刻**，**物理的時間**を表している．慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ に対応して点 O を通る $\vec{E}_0$ 軸 $\overset{\text{def}}{=} \{O + \vec{t} | \vec{t} \in [\vec{E}_0]\}$ が定まるが，これがこの慣性系における時間軸である[38)]．

慣性系についての上記のことおよび波動方程式 (4.55)，(4.63)（あるいは (4.68)，(4.72)）から，「**真空中の電磁波の速さは波源の運動状態に無関係（波源は加速度運動をしていてもよい）で，任意の慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ で同一の値 c である**」ことが帰結する．光は電磁波の一種であることに鑑み，c のことを**真空中の光の速さ**といい，上の事実を**光速度の不変性**という．なお，

---

37) 「物理量はすべて時空におけるテンソル量であって，物理法則はこれらの量に関する方程式である」という内容は通例**一般相対性原理**とよばれている．我々は，「時間と空間を合わせたものは Minkowski 時空であることと一般相対性原理」を基本的前提とするのである．なお，素粒子論においては，電子やクオーク等も扱う．このような場面では，スピノル量も現れる．

38) 慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ が Newton 力学における慣性系に相当するものであることは，部分節 **4.3.2** において明白になる．

第5章の部分節**5.2.2**で示すように，**加速度運動をしている観測者に対する電磁波（光）の速さは c とは限らない**.

ここで，時間と長さの単位，$c, M_{(0)123}$ および $E_{(0)123}$ の値について述べておこう．現代の国際単位系にあっては，

$1[\mathrm{s}] = {}^{133}_{55}\mathrm{Cs}$ 原子の基底状態における2つの超微細構造準位間の遷移によって放射される電磁波の周期の9192631770倍の時間

$1[\mathrm{m}] = 299792458^{-1}[\mathrm{s}]$ の間に光が真空中で慣性系に対して進む距離

と**定義**されている．この定義によれば，$c = 2.99792458 \times 10^8[\mathrm{m/s}]$ である．また，$M_{(0)123} = 4\pi \times 10^{-7}[\mathrm{N/A^2}]$ ととり，(4.56) に基づいて $E_{(0)123} = 10^7/(4\pi c^2)[\mathrm{A^2/N}]$ と定めている．

各事象は，それらの広がりが無視できるならば，Minkowski 時空内の点で表される．この点を**世界点**という．事象の経緯は時空における曲線で表される．この曲線を**世界線**という．質点の運動はこの時空における世界線で記述される．時々刻々の質点の位置は，この曲線上の世界点で表される[39]．質点の世界線を Γ で表すことにすると，Γ 上の点は a, b を $a < b$ なる実数としてパラメーター s （$s \in (a,b)$）を用いて $\Gamma(s)$ と表すことができる．世界点 $\Gamma(s)$ の近傍における任意の局所座標系 (x^0, x^1, x^2, x^3) を用いて，$\Gamma^\mu(s) \overset{\mathrm{def}}{=} x^\mu(\Gamma(s))$ とおいて

$$\frac{D\Gamma(s)}{Ds} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{d\Gamma^\mu(s)}{ds}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_{\Gamma(s)} \tag{4.108}$$

で定義される $D\Gamma(s)/Ds$ を考えると，これは Γ の点 $\Gamma(s)$ における接ベクトルである．とくに，(x^0, x^1, x^2, x^3) が座標枠 $[O; (\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)]$ に関する座標系である場合は，$\Gamma(s)$ は $\Gamma(s) = O + \overrightarrow{O\Gamma(s)} = O + \vec{x}(s) = O + \Gamma^\mu(s)\vec{e}_\mu$ と表されるが，この座標枠が s に依存しない場合には，$D\Gamma(s)/Ds$ は

$$\frac{D\Gamma(s)}{Ds} = \frac{d\Gamma^\mu(s)}{ds}\vec{e}_\mu = \frac{D\vec{x}(s)}{Ds} = \frac{d\vec{x}(s)}{ds} \tag{4.109}$$

となる．

---

39) 紙の上に世界点，世界線を描いて議論するとき,「Minkowski 時空にあっては Pythagoras の定理も 3 角不等式も成り立たない」ことに留意しなくてはならない．日常的に Euclid 空間に慣れ親しんでいる我々はともすると錯覚に陥るので注意を喚起しておく．

「質点の運動の速さは，任意に選んだある慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ において c よりも小さい」と仮定しよう[40)]．すると，s の任意の値に対して $D\Gamma(s)/Ds$ は時間的ベクトルである．すなわち，g を Minkowski 時空の計量とすると，

$$g\left(\frac{D\Gamma(s)}{Ds}, \frac{D\Gamma(s)}{Ds}\right) = g\left(\frac{D\vec{x}(s)}{Ds}, \frac{D\vec{x}(s)}{Ds}\right) < 0, \quad \forall s \in (a, b) \tag{4.110}$$

である．

定義 4.2.1. Minkowski 時空における連結な 1 次元曲面（曲線）であって，その上の任意の点における接ベクトルがすべて時間的ベクトルであるものを**時間的曲線**という[41)]．

上の定義によれば，質点の運動を表す世界線 Γ は時間的曲線である．Γ は接ベクトル $D\Gamma(s)/Ds$ が正の時間的ベクトルであるように向き付けられているものとする．このような曲線を**正の時間的曲線**といい，これを図で表す際には，正の向きに向けて矢印を付けることとする．

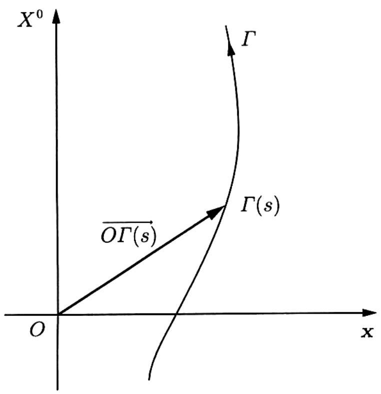


図 4.1 世界点，世界線

40) とくに断らない限り，質点の質量は正であるものとする．

41) 簡単のため，本書では，曲線としてはその上の任意の点で接ベクトルをもつものに限定して考察する．幾つかの点で接ベクトルを持たないような曲線をも含めたい場合には，「Minkowski 時空の可微分とは限らない連結な曲線であって，その上の任意の相異なる 2 点 P, Q についてベクトル $\overrightarrow{PQ}$ がすべて時間的ベクトルであるものを時間的曲線という」と定義すればよい．以下の議論を，接ベクトルを持たない点が有限個である時間的曲線の場合についても当てはまるように一般化することは容易である．

正の時間的曲線に関連して，次の命題が成り立つ．

命題 4.2.1. M_4 における 2 点 A, B について，$\overrightarrow{AB}$ が正の時間的ベクトルであるための必要十分条件は，$\Gamma(a) = A, \Gamma(b) = B$ であるような正の時間的曲線[42] $\Gamma : [a, b] \to M_4$ が存在することである．

この命題の証明[43] は，命題自身の簡明さの割に面倒である．

その上の任意の相異なる 2 点 P, Q に対して，$\overrightarrow{PQ}$ が光的ベクトルであるような世界線を**光的世界線** という．光速度の不変性によれば，世界点 P で発射された**光の 4 次元的軌跡は光源の運動状態によらずに定まる**，これは P を端点とする光的世界線であって，P を頂点とする未来の光円錐 $P + \mathcal{Y}_+ = \{P + \vec{u} | \vec{u} \in \mathcal{Y}_+\}$ 上にある．光的ベクトル，光円錐等の言葉を用いる所以である．P で発射された光の光的世界線はその上の点 Q $(\neq P)$ について $P \to Q$ が正の向きであるように向き付けるものとする．

空間的関係にある任意の 2 事象[44] P, Q に対して，

（1）　適当な慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ と適当な実数 X^0 が存在して，$[O; \vec{E}_0]$ の時刻 X^0/c における空間 $\{M_4(X^0); S^3(\vec{E}_0)\}$ について P, Q が共に $M_4(X^0)$ の点である．

（2）　適当な慣性系 $[O'; \vec{E'}_0]$ と適当な実数 X'^0, Y'^0 $(X'^0 < Y'^0)$ が存在して，$[O'; \vec{E'}_0]$ の時刻 X'^0/c における空間 $\{M_4(X'^0); S^3(\vec{E'}_0)\}$，時刻 Y'^0/c における空間 $\{M_4(Y'^0); S^3(\vec{E'}_0)\}$ に対して $P \in M_4(X'^0)$, $Q \in M_4(Y'^0)$ である．

（1）は慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ においては P, Q は同時刻であることを表し，（2）は慣性系 $[O'; \vec{E'}_0]$ においては P は Q よりも前の事象であることを表す．また，適当に選んだ慣性系 $[O''; \vec{E''}_0]$ においては，P が Q よりも後の事象と

---

42) (a) 以下では，閉区間 $[a, b]$ を含む開区間 I 上で定義された（可微分な）曲線 $\tilde{\Gamma} : I \to M_4$ があるとき，$\tilde{\Gamma}$ を $[a, b]$ に制限して $\Gamma \overset{\text{def}}{=} \tilde{\Gamma}|_{[a,b]}$ とおくことにより，閉区間上で定義された（可微分な）曲線も扱う．(b) 部分節 **4.3.2** における議論を参考にするとわかるように，時間的曲線は力を受けて運動する質点の世界線を表す．とくに，時間的アフィン直線は自由運動（= 力を受けない運動）を表す．なお，以下ではアフィン直線のことを単に直線とよぶ．

43) 文献 [22] を参照．

44) 本書では事象としては広がりの無視できるもののみを考えることとし，これのことを単に事象とよぶ．

なることは明らかであろう．すなわち，空間的関係にある 2 事象 P, Q については，慣性系のとり方によって，P, Q は同時刻にも，P が Q よりも前にも，P が Q よりも後にもなる[45)]．これを**同時刻の相対性**という．同時刻の相対性は系 $\{M_4; \leqslant\}$, $\{M_4; \geqslant\}$ が全順序集合でないことに照応している．

異なる 2 つの世界点間の情報伝達（物理的効果の伝達）は物体の運動か光（電磁場）のような場の伝播によってなされる．ここで特殊相対論における通例の流儀にのっとって**「物体の運動の速さ，作用の伝播の速さおよび場の伝播の速さは，すべて任意に選んだある慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ において c 以下である」と仮定する**[46)]．このとき，以下のことが帰結する．

互いに，時間的関係にある 2 事象，光的関係にある 2 事象については，時刻の前後関係は，慣性系のとり方によらず絶対的である．例えば，ある慣性系で観測した場合に列車が東京駅を出てから新大阪駅に到着するものとして観測されるならば，この列車は別の如何なる慣性系で観測しても東京駅を出てから新大阪駅に到着することになる．逆順になったり，両駅に同時に存在するように観測されることはあり得ない．

世界点 P を頂点とする光円錐の内部，すなわち P の時間的未来と過去は，P を通る質点の世界線が通り得る世界点全体の集合であり，P の因果的未来（過去）は，P で生起した事象が（生起する事象に）影響をおよぼし得る事象の全体である[47)]．P の因果的未来でも因果的過去でもない時空領域内の世界点 Q は P とは空間的関係にあり，Q（P）で生起する事象は P（Q）で生起する事象に影響を与えない．

また，時空が時空的－時間的－空間的に向き付けられた 2 次元 Minkowski 空間（2 次元 Minkowski 時空とよぶ）である場合を考えると，図 4.2 の領域 I で生起する事象とIIIで生起する事象とは互いに影響をおよぼし合わない，すなわち，領域 I とIIIとは因果的に断絶している．しかし，これらは共に領域IIの事象に影響を与え，領域IVの事象から影響を受ける．したがって，I とIIIとは物理的に全く無関係というわけではない．なお，時間的向きは，物理的時間の未来方向が正であるように指定され，また領域II（IV）

45) このことは，考えている慣性系にいる観測者の目に 2 事象がそれぞれ同時刻，前，後として知覚されることを意味しない．

46) ある慣性系において速さが c 以下であれば（c より小さければ）任意の慣性系における速さも c 以下である（c より小さい）ことが導かれる．次部分節の (4.139) に続く記述を参照．

47) 第 2 章の図 2.4 を参照．

と領域Ⅰ，Ⅲの境界線上の点はⅠ，Ⅲには含まれておらず，これらの線は領域Ⅱ（Ⅳ）に含まれているものとする．

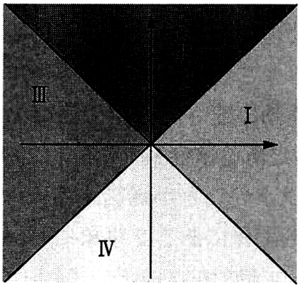


図 4.2　2 次元 Minkowski 時空の領域

4.2.2　固有時，速度，加速度

質点の運動を考え，その世界線を $\Gamma : [a,b] \to M_4$ とする．

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{c}\sqrt{-g\left(\frac{D\Gamma(s)}{Ds}, \frac{D\Gamma(s)}{Ds}\right)}, \quad \forall s \in [a,b] \tag{4.111}$$

であるようにパラメーター τ を選ぶと，

$$g(\vec{u}(\tau), \vec{u}(\tau)) = -c^2 \tag{4.112}$$

となる．ここに

$$\vec{u}(\tau) \overset{\text{def}}{=} \frac{D\Gamma(\tau)}{D\tau} \tag{4.113}$$

とした．τ およびその個々の値を，それぞれ，質点の（あるいはその世界線に沿う）**固有時**および**固有時刻**とよび，また Γ に沿う線積分

$$\tau_\Gamma \overset{\text{def}}{=} \int_\Gamma d\tau = \tau_b - \tau_a \tag{4.114}$$

を世界線 Γ に沿う**固有時間**という．ここに，τ を s の関数として $\tau(s)$ と表すことにして，$\tau_a \overset{\text{def}}{=} \tau(a)$, $\tau_b \overset{\text{def}}{=} \tau(b)$ とおいた．τ_Γ は Γ に沿って固有時刻 τ_a から固有時刻 τ_b まで運動した時計がその間に刻む時間経過である[48]．

[48] 時計の大きさは無視できるものとする．

なお，$\mathcal{M}_4$ の τ に依存しない座標枠 $[O;(\vec{e}_0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)]$ を任意に 1 つとって $\Gamma(\tau) = O + \overrightarrow{O\Gamma(\tau)} = O + \vec{x}(\tau) = O + \Gamma^\mu(\tau)\vec{e}_\mu$ と表すと，$\vec{u}(\tau) = D\vec{x}(\tau)/D\tau = (d\Gamma^\mu(\tau)/d\tau)\vec{e}_\mu = d\vec{x}(\tau)/d\tau$ である[49]．

$\Gamma(a) = A = \Gamma'(a)$, $\Gamma(b) = B = \Gamma'(b)$ であるような正の時間的曲線 Γ, Γ' を世界線とする 2 つの時計の運動中の経過時間 $\tau_\Gamma, \tau_{\Gamma'}$ は一般に等しくない．

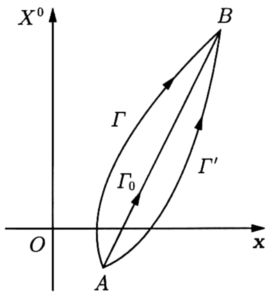


図 **4.3** 世界線と固有時間

命題 4.2.2. 最大の経過時間を示すのは，A, B を結ぶ線分 $\Gamma_0(s) \stackrel{\text{def}}{=} A + \{(s-a)/(b-a)\}\overrightarrow{AB}$, $\forall s \in [a,b]$ を世界線とする時計である[50]．

証明： A, B を結ぶ正の時間的曲線が存在するから，命題 4.2.1 により $\overrightarrow{AB}$ は正の時間的ベクトルであり，本命題でいう $\Gamma_0 : [a,b] \to M_4$ は A, B を結ぶ正の時間的線分である．そして，$\vec{E}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{AB}/\sqrt{-g(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB})}$ は正の時間的単位ベクトルである．そこで A を原点とする慣性系 $[A;\vec{E}_0]$ をとって，曲線 Γ 上の世界点 P の位置ベクトル $\vec{x} = \overrightarrow{AP}$ を $\vec{x} = X^0\vec{E}_0 + \mathbf{x}$, $g(\vec{E}_0,\mathbf{x}) = 0$ と表して $t \stackrel{\text{def}}{=} X^0/c$ とすると，(4.112) を用いることにより

$$\tau_\Gamma = \int_\Gamma d\tau = \int_0^T \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} g\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}, \frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)}\, dt \le T \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{\Gamma_0} \qquad (4.115)$$

---

49) 座標枠，慣性系としては，一般には $[O(\tau),(\vec{e}_0(\tau),\vec{e}_1(\tau),\vec{e}_2(\tau),\vec{e}_3(\tau))]$, $[O(Q),\vec{E}_0(Q)]$ というように固有時刻 τ や適当に固定した世界点 Q に依存するものが考えられる．以下では，この例のように τ, Q などの記号が明示してある場合以外は，考えている座標枠，慣性系は時間的にも空間的にも一定であるものとする．

50) 少し後の記述からわかるように，この時計の運動は等速度運動である．

を得る[51]．$\tau_\Gamma = \tau_{\Gamma_0}$ が成り立つのは，$\Gamma = \Gamma_0$ であるときに限ることは明らかであろう．かくて命題が成り立つことがわかった．

(4.113) で定義されるベクトル $\vec{u}(\tau)$ を **4 元速度**という．$\vec{u}(\tau)$ は正の時間的ベクトルである．また $\Gamma(\tau)$ の近傍における局所座標系 (x^0, x^1, x^2, x^3) を用いて

$$
\begin{aligned}
\vec{a}(\tau) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{D\vec{u}(\tau)}{D\tau} \\
&\stackrel{\text{def}}{=} \left[\frac{d^2\Gamma^\mu(\tau)}{d\tau^2} + \left\{ {\mu \atop \rho\ \nu} \right\}\Big(\Gamma(\tau)\Big)\frac{d\Gamma^\rho(\tau)}{d\tau}\frac{d\Gamma^\nu(\tau)}{d\tau}\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_{\Gamma(\tau)}
\end{aligned}
\tag{4.116}
$$

で定義されるベクトル $\vec{a}(\tau)$ を **4 元加速度**という．ここに $\left\{ {\mu \atop \rho\ \nu} \right\}$ は Minkowski 時空の計量 g の成分 $g_{\mu\nu} = g(\partial/\partial x^\mu, \partial/\partial x^\nu)$ を用いて (3.45) のように定義された Christoffel 記号を表す．(x^0, x^1, x^2, x^3) が座標枠 $[O; (\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)]$ に関する座標系である場合は，$\Gamma(\tau)$ は $\Gamma(\tau) = O + \vec{x}(\tau) = O + \Gamma^\mu(\tau)\vec{e}_\mu$ と表されるが，このとき

$$
\vec{a}(\tau) = \frac{d^2\Gamma^\mu(\tau)}{d\tau^2}\vec{e}_\mu = \frac{D^2\vec{x}(\tau)}{D\tau^2} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{D}{D\tau}\left(\frac{D\vec{x}(\tau)}{D\tau}\right) \tag{4.117}
$$

となる．$\vec{u}(\tau)$ は Γ を世界線とする時計がそれ自身で計った時計自身の 4 次元的移動速度を表しており，また $\vec{a}(\tau)$ はこの速度の時間的変化率である．

(4.112) から直ちに導かれるように

$$
g(\vec{a}(\tau), \vec{u}(\tau)) = 0 \tag{4.118}
$$

である．すなわち，4 元速度 $\vec{u}(\tau)$ と 4 元加速度 $\vec{a}(\tau)$ とは直交する．$\vec{u}(\tau)$ は時間的ベクトルであるから，命題 1.3.27 によれば，$\vec{a}(\tau)$ は零ベクトルであるか空間的ベクトルである．世界線 Γ が線分であることと $\vec{u}(\tau)$ がすべての $\tau \in [\tau_a, \tau_b]$ に対して一定であることとは同等である．

なお，**4 元速度，4 元加速度および固有時間は世界線 Γ が与えられればすべて一意的に定まるものであって，それを記述する際に用いた局所座標**

[51] $d\mathbf{x}(t)/dt$ は $\mathbf{x}(t)$ を $S^3(\vec{E}_0)$ の時間に依存しない基底 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ をとって $\mathbf{x}(t) = x^\alpha(t)\mathbf{e}_\alpha$ と表して $d\mathbf{x}(t)/dt \stackrel{\text{def}}{=} (dx^\alpha(t)/dt)\mathbf{e}_\alpha$ と定義されているものとする．以下，**慣性系を用いる議論においては，ベクトルの時間変数による微分をこのように定義することとする．**

系，座標枠等のとり方に依存しないことに注意しよう．命題 4.2.2 で扱った問題は，いわゆる**双子のパラドックス**との関わりで取りあげられ,「世界線が直線あるいはその連結な部分集合ではない運動，すなわち加速度運動をする時計には見かけの重力（慣性力）が作用するから，この問題は特殊相対論の範囲では扱えず，このパラドックスの解決のためには一般相対論が入用である」旨の主張がなされることがある．この主張が誤っていることはこれまでの議論から明らかであろう．

正規直交座標枠 $[O;(\vec{E}_0,\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3)]$ を用いて位置ベクトル $\vec{x}(\tau)$ を $\vec{x}(\tau)=x^k(\tau)\vec{E}_k$ と表すと，4 元速度 $\vec{u}(\tau)=u^k(\tau)\vec{E}_k \overset{\text{def}}{=} (dx^k(\tau)/d\tau)\vec{E}_k$ および 4 元加速度 $\vec{a}(\tau)=a^k(\tau)\vec{E}_k \overset{\text{def}}{=} (d^2x^k(\tau)/d\tau^2)\vec{E}_k$ は

$$\left.\begin{aligned} g(\vec{u}(\tau),\vec{u}(\tau)) &= \eta_{kl}u^k(\tau)u^l(\tau) = -c^2 \\ g(\vec{a}(\tau),\vec{u}(\tau)) &= \eta_{kl}a^k(\tau)u^l(\tau) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.119}$$

を満足することとなる．ここで (1.142) を用いた．(4.119) の第 1 式からわかるように，4 元速度の成分を構成する 4 つの $u^k(\tau)$ のうち独立なものは 3 つである．

一般に，線型空間 V_{o4} に平行な線型空間のベクトル $\vec{V}$ は $[O;\vec{E}_0]$ を慣性系とするとき $\vec{V}=V^0\vec{E}_0+\mathbf{V}$, $g(\vec{E}_0,\mathbf{V})=0$ と分解されるが，$V^0,\mathbf{V}$ をそれぞれ $\vec{V}$ の $[O;\vec{E}_0]$ における**時間成分**，**空間成分**という．この内容を $\vec{V}=(V^0,\mathbf{V})$ と表すこともある．慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ を用いて質点の運動を記述する場合，質点の位置は $P=O+\vec{x}(\tau)=O+x^0(\tau)\vec{E}_0+\mathbf{x}(\tau)=O+ct\vec{E}_0+\mathbf{X}(t)$ と表される．ただし，$g(\vec{E}_0,\mathbf{x}(\tau))=0$, $x^0(\tau)=ct$, $\mathbf{x}(\tau)=\mathbf{X}(t)$ ととった．ベクトル $\mathbf{U}(t)\overset{\text{def}}{=}d\mathbf{X}(t)/dt, \mathbf{A}(t)\overset{\text{def}}{=}d^2\mathbf{X}(t)/dt^2$ は，それぞれこの慣性系における物理的 3 次元空間における質点の **3 次元的速度**と **3 次元的加速度**を表す．これらの量と，4 元速度 $\vec{u}$，4 元加速度 $\vec{a}$：

$$\left.\begin{aligned} &\vec{u}(\tau)=\frac{d\vec{x}(\tau)}{d\tau}=u^0(\tau)\vec{E}_0+\mathbf{u}(\tau), \qquad g(\vec{E}_0,\mathbf{u}(\tau))=0 \\ &u^0(\tau)\overset{\text{def}}{=}\frac{dx^0(\tau)}{d\tau}, \qquad \mathbf{u}(\tau)\overset{\text{def}}{=}\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau} \end{aligned}\right\} \tag{4.120}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{a}(\tau)=\frac{d^2\vec{x}(\tau)}{d\tau^2}=a^0(\tau)\vec{E}_0+\mathbf{a}(\tau) \\ &a^0(\tau)\overset{\text{def}}{=}\frac{d^2x^0(\tau)}{d\tau^2}, \qquad \mathbf{a}(\tau)\overset{\text{def}}{=}\frac{d^2\mathbf{x}(\tau)}{d\tau^2} \end{aligned}\right\} \tag{4.121}$$

との関係を調べよう．(4.112) より，

$$\left(\frac{dx^0(\tau)}{d\tau}\right)^2 = c^2 + \left|\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}\right|^2 \tag{4.122}$$

となる．なお，

$$\left|\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}\right| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g\left(\frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}, \frac{d\mathbf{x}(\tau)}{d\tau}\right)} \tag{4.123}$$

とおいた．ここで

$$\beta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c}|\mathbf{U}(t)| \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{c}\sqrt{g(\mathbf{U}(t), \mathbf{U}(t))} \tag{4.124}$$

とすると，(4.122) より

$$u^0(\tau) = c\frac{dt}{d\tau} = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathbf{u}(\tau) = \frac{\mathbf{U}(t)}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{4.125}$$

を得る．なお，$\vec{E}_0$ と $\vec{u}(\tau) = D\vec{x}(\tau)/D\tau = d\vec{x}/d\tau$ が共に正の時間的ベクトルであることにより $dt/d\tau$ が正であることを用いた．さらに，(4.125) から

$$\left.\begin{aligned} a^0(\tau) &= \frac{1}{c(1-\beta^2)^2}g(\mathbf{U}(t), \mathbf{A}(t)) \\ \mathbf{a}(\tau) &= \frac{1}{1-\beta^2}\mathbf{A}(t) + \frac{1}{c^2(1-\beta^2)^2}g(\mathbf{U}(t), \mathbf{A}(t))\mathbf{U}(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.126}$$

が導かれる．(4.125) の第 2 式と (4.126) から明らかなように，$\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{0}$ と $\mathbf{U}(t) = \mathbf{0}$ とは同値であり，$\vec{a}(\tau) = \vec{0}$, $\mathbf{a}(\tau) = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}(t) = \mathbf{0}$ の 3 つは互いに同値である．すなわち，慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ において，**固有時で計って静止（等速度運動）していることと，この慣性系の時間で計って静止（等速度運動）していることとは同等である**．ある質点の 4 元速度の $[O; \vec{E}_0]$ における空間成分が $\mathbf{0}$ であるとき，$[O; \vec{E}_0]$ をその質点の**静止系** とよぶ．

なお，**3 次元的速度，3 次元的加速度は，“3 次元” という形容語がついているが，これらは共に 4 次元 Minkowski 的線型空間におけるベクトルであることに注意しよう．**

世界線が時間的直線あるいはその連結な部分集合である質点はすべての慣性系に対して等速度運動しており，この質点は「**時空そのものに対して**

等速度運動をしている」のである．また，世界線が直線でもその一部分でもない時間的曲線である質点は「**時空そのものに対して**加速度運動をする」ことになる．この意味で，**等速度運動であるか加速度運動であるかということは，座標系のとり方によらない絶対的意味をもっている**.

ここで，質点の運動を記述する際に 2 つの異なる慣性系を用いた場合の空間的位置ベクトルの関係，速度の加法則，さらには 2 つの異なる正規直交座標枠を用いた場合における対応する問題，Poincaré 座標枠変換，慣性系と正規直交座標枠との関係等について検討しておこう．

$[O;\vec{E}_0], [O';\vec{E}'_0]$ を 2 つの異なる慣性系とする．

$$\mathbf{v}' \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{\gamma}(\vec{E}_0 - \gamma\vec{E}'_0), \qquad \gamma \stackrel{\text{def}}{=} -g(\vec{E}_0, \vec{E}'_0) \tag{4.127}$$

とおくと，$\mathbf{v}'$ は $\vec{E}'_0$ と直交する．したがって，$\mathbf{v}'$ は空間的ベクトルか零ベクトルである．容易にわかるように，$\gamma = 1/\sqrt{1-(v'/c)^2}$ である．ここに $v' \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{v}'| = \sqrt{g(\mathbf{v}', \mathbf{v}')}$ とおいた．結局

$$\left.\begin{aligned} &\vec{E}_0 = \gamma\left(\vec{E}'_0 + \frac{\mathbf{v}'}{c}\right), \qquad g(\vec{E}'_0, \mathbf{v}') = 0 \\ &\gamma \stackrel{\text{def}}{=} -g(\vec{E}_0, \vec{E}'_0) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v'}{c}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{4.128}$$

となる． 同様に

$$\left.\begin{aligned} &\vec{E}'_0 = \gamma\left(\vec{E}_0 + \frac{\mathbf{v}}{c}\right), \qquad g(\vec{E}_0, \mathbf{v}) = 0 \\ &\gamma = -g(\vec{E}_0, \vec{E}'_0) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \tag{4.129}$$

という表示が得られる．ここに $v \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{v}|$ とした．明らかに $v = v'$ である．そこで，以下では記号 v' は使わないことにする．$\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ は，(4.135) でみるように，それぞれ $[O';\vec{E}'_0]$ の $[O;\vec{E}_0]$ に対する 3 次元的速度，$[O;\vec{E}_0]$ の $[O';\vec{E}'_0]$ に対する 3 次元的速度である．また γ の表示からわかるように $v < c$ である．

点の位置を P とするとき

$$\vec{x} \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{OP}, \quad \vec{x}' \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{O'P}, \quad \vec{h} \overset{\text{def}}{=} \overrightarrow{OO'} \tag{4.130}$$

とおくと，

$$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{h} \tag{4.131}$$

となる．

$$\left.\begin{aligned} \vec{x} &= X^0\vec{E}_0 + \mathbf{x}, & g(\vec{E}_0, \mathbf{x}) &= 0 \\ \vec{x}' &= X'^0\vec{E}'_0 + \mathbf{x}', & g(\vec{E}'_0, \mathbf{x}') &= 0 \\ \vec{h} &= H^0\vec{E}_0 + \mathbf{h}, & g(\vec{E}_0, \mathbf{h}) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.132}$$

と表すと，関係式

$$\left.\begin{aligned} X'^0 &= \gamma(X^0 - H^0) - g(\mathbf{x} - \mathbf{h}, \vec{E}'_0) \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{h} + g(\mathbf{x} - \mathbf{h}, \vec{E}'_0)\vec{E}'_0 + \gamma(X^0 - H^0)\frac{\mathbf{v}'}{c} \end{aligned}\right\} \tag{4.133}$$

が成り立つ．これは

$$\left.\begin{aligned} X^0 - H^0 &= \gamma X'^0 - g(\mathbf{x}', \vec{E}_0) \\ \mathbf{x} - \mathbf{h} &= \mathbf{x}' + g(\mathbf{x}', \vec{E}_0)\vec{E}_0 + \gamma X'^0\frac{\mathbf{v}}{c} \end{aligned}\right\} \tag{4.134}$$

と同等である．なお，ここで $g\left(\mathbf{x} - \mathbf{h} + g(\mathbf{x} - \mathbf{h}, \vec{E}'_0)\vec{E}'_0, \vec{E}'_0\right) = 0$, $g\left(\mathbf{x}' + g(\mathbf{x}', \vec{E}_0)\vec{E}_0, \vec{E}_0\right) = 0$ であることに注意しよう．

慣性系 $[O'; \vec{E}'_0]$ において，非時間的ベクトル $\mathbf{x}'$ が一定ベクトルである点（＝この慣性系に固定されている質点の空間的位置を表す点）を $[O; \vec{E}_0]$ で観測したときの 3 次元的速度，すなわち $[O'; \vec{E}'_0]$ の $[O; \vec{E}_0]$ に対する 3 次元的速度 $d\mathbf{x}/dt$，および $[O; \vec{E}_0]$ の $[O'; \vec{E}'_0]$ に対する 3 次元的速度 $d\mathbf{x}'/dt'$ は，(4.133) と (4.134) からわかるようにそれぞれ

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{c}{\gamma}(\vec{E}'_0 - \gamma\vec{E}_0), \quad \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \mathbf{v}' = \frac{c}{\gamma}(\vec{E}_0 - \gamma\vec{E}'_0) \tag{4.135}$$

であり，時間的に一定である．「$[O; \vec{E}_0]$ と $[O'; \vec{E}'_0]$ とは互いに相手に対して一定の 3 次元的速度で運動している」のである．

(4.135) の 2 つの式から

$$\mathbf{v}' = -\gamma\left(\mathbf{v} + \frac{v^2}{c}\vec{E}_0\right), \quad \mathbf{v} = -\gamma\left(\mathbf{v}' + \frac{v^2}{c}\vec{E}'_0\right) \tag{4.136}$$

が導かれ，これからさらに

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = -\gamma v^2 \tag{4.137}$$

が得られる．なお，$|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}'| = v$ ではあるが，$v \neq 0$ である限り，$\mathbf{v} \neq -\mathbf{v}'$ であることに注意しよう．「$[O'; \vec{E}'_0]$ **の** $[O; \vec{E}_0]$ **に対する 3 次元的速度** $\mathbf{v}$ **と** $[O; \vec{E}_0]$ **の** $[O'; \vec{E}'_0]$ **に対する 3 次元的速度** $\mathbf{v}'$ **とは大きさは等しいが，**$\mathbf{v} = -\mathbf{v}'$ **ではない**」のである．これは，一見逆説的であるが，$\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ は共に 4 次元ベクトルであり，$\mathbf{v}$ は $\vec{E}_0$ に直交し，$\mathbf{v}'$ は $\vec{E}'_0$ に直交して，$\vec{E}_0$ と $\vec{E}'_0$ は平行ではないから，むしろ当然の帰結である．

(4.134) から導かれるように，質点あるいは光の運動を慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ と $[O'; \vec{E}'_0]$ を用いて記述する場合，それぞれに対する 3 次元的速度を $\mathbf{U}$ と $\mathbf{U}'$ と記すことにすると，これらの間には次の関係がある：

$$\mathbf{U} = \frac{\mathbf{U}' + \dfrac{\gamma}{c} g(\mathbf{U}', \mathbf{v}')\vec{E}_0 + \gamma\mathbf{v}}{\gamma\left(1 - \dfrac{g(\mathbf{U}', \mathbf{v}')}{c^2}\right)} \tag{4.138}$$

これは慣性系間の**速度の加法則**の一般形である．この関係式と (4.128) から

$$1 - \left(\frac{U}{c}\right)^2 = \frac{\left\{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2\right\}\left\{1 - \left(\dfrac{U'}{c}\right)^2\right\}}{\left(1 - \dfrac{g(\mathbf{U}', \mathbf{v}')}{c^2}\right)^2} \tag{4.139}$$

が得られる．ただし，$U' \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g(\mathbf{U}', \mathbf{U}')}$, $U \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g(\mathbf{U}, \mathbf{U})}$ とした．なお，$g(\mathbf{U}', \mathbf{v}')$ において，$\mathbf{U}', \mathbf{v}'$ は共に 3 次元 Euclid 的線型空間 $S(\vec{E}'_0)$ に属するから $g(\mathbf{U}', \mathbf{v}') \leq U'v$ である．したがって，$U' \leq c$, $v < c$ である限り，(4.138) と (4.139) の分母は正であることに注意しよう．また (4.139) より，$U' \leq c$, $v < c$ であれば $U \leq c$ であって，$U = c$ となるのは $U' = c$ の場合に限られることがわかる．

質点の運動を，慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ と $[O';\vec{E}'_0]$ にそれぞれ対応する正規直交座標枠 $[O;(\vec{E}_0,\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3)]$, $[O';(\vec{E}'_0,\vec{E}'_1,\vec{E}'_2,\vec{E}'_3)]$ を用いて記述することを考える．Minkowski 時空での質点の位置を P とするとき，$\vec{x},\vec{x}',\vec{h}$ を (4.130) によって定義すると (4.131) が成り立つ．基底 $(\vec{E}_0,\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3)$ から基底 $(\vec{E}'_0,\vec{E}'_1,\vec{E}'_2,\vec{E}'_3)$ への変換は Lorentz 基底変換であり，

$$\vec{E}'_i = K^j{}_i\vec{E}_j \qquad (i=0,1,2,3) \tag{4.140}$$

と表すと，命題 1.3.11 からわかるように

$$\eta_{ij} = K^k{}_i\eta_{kl}K^l{}_j, \quad \eta^{ij} = K^i{}_k\eta^{kl}K^j{}_l \qquad (i,j=0,1,2,3) \tag{4.141}$$

の関係がある．

$$\vec{x} = X^i\vec{E}_i, \quad \vec{x}' = X'^i\vec{E}'_i, \quad \vec{h} = h^i\vec{E}_i \tag{4.142}$$

と表すと，次の関係が成り立つ：

$$X^i = K^i{}_jX'^j + h^i \tag{4.143}$$

さらに，行列 $K \stackrel{\mathrm{def}}{=} (K^j{}_i)$ を命題 1.3.34 におけるように

$$K = \begin{pmatrix} \epsilon_t & 0 \\ 0 & \epsilon_s D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\mathbf{B} \\ \gamma^T\mathbf{B} & \mathbf{I}_3 + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}C \end{pmatrix} \tag{4.144}$$

と表そう．ただし

$$\left.\begin{aligned}
&\epsilon_t \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{K^0{}_0}{|K^0{}_0|} = 1, \quad \gamma \stackrel{\mathrm{def}}{=} |K^0{}_0| = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
&\beta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{\sum_{a=1}^{3}(\beta_a)^2}, \quad D \stackrel{\mathrm{def}}{=} \epsilon_s G, \quad \epsilon_s \stackrel{\mathrm{def}}{=} \det G \\
&G \stackrel{\mathrm{def}}{=} K^{\{3\}}\left(\mathbf{I}_3 - \frac{\gamma}{1+\gamma}C\right), \quad \mathbf{B} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\beta_1,\beta_2,\beta_3) \\
&C \stackrel{\mathrm{def}}{=} (C^a{}_b) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\beta^a\beta_b), \quad K^{\{3\}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (K^a{}_b) \\
&\beta_a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \beta^a \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{K^0{}_a}{K^0{}_0} \qquad (a,b=1,2,3)
\end{aligned}\right\} \tag{4.145}$$

であり，${}^T\mathbf{B}, \mathbf{I}_3$ は，それぞれ $\mathbf{B}$ を転置して得られる縦ベクトルおよび 3 次の単位行列を表す．(1.151) と命題 1.3.35 からわかるように，D, G は，それぞれ，3 次元 Euclid 的線型空間における基底の回転および直交変換を表す．K のこの表示を用いると (4.140) の内容は

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}'_0 &= \gamma\left(\vec{E}_0 + \frac{\mathbf{v}}{c}\right) \\ \mathbf{E}'_a &= \mathbf{E}_a + \frac{\gamma g(\mathbf{v}, \mathbf{E}_a)}{c}\vec{E}_0 + \frac{\gamma^2 g(\mathbf{v}, \mathbf{E}_a)\mathbf{v}}{c^2(1+\gamma)} \quad (a = 1, 2, 3) \end{aligned}\right\} \tag{4.146}$$

と表される．ここに，行列 G を $G = (G^b{}_a)$ と表して，$v^a \stackrel{\text{def}}{=} v_a \stackrel{\text{def}}{=} c\beta_a$, $\mathbf{E}_a \stackrel{\text{def}}{=} G^b{}_a\vec{E}_b$, $\mathbf{E}'_a \stackrel{\text{def}}{=} \vec{E}'_a$ とおき，さらに $\mathbf{v} \stackrel{\text{def}}{=} v^a\mathbf{E}_a$ とした．(4.146) の関係を $\vec{E}'_0 = L^0{}_0\vec{E}_0 + L^a{}_0\mathbf{E}_a$, $\mathbf{E}'_a = L^0{}_a\vec{E}_0 + L^b{}_a\mathbf{E}_b$ と表すと，$L^0{}_0 = \gamma$, $L^a{}_0 = \gamma v^a/c$, $L^0{}_a = \gamma v_a/c$, $L^b{}_a = \delta^b{}_a + \gamma^2 v^b v_a/c^2(1+\gamma)$ である．(4.146) に対応して

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_0 &= \gamma\left(\vec{E}'_0 + \frac{\mathbf{v}'}{c}\right) \\ \mathbf{E}_a &= \mathbf{E}'_a + \frac{\gamma}{c}g(\mathbf{v}', \mathbf{E}'_a)\vec{E}'_0 + \frac{\gamma^2 g(\mathbf{v}', \mathbf{E}'_a)\mathbf{v}'}{c^2(1+\gamma)} \end{aligned}\right\} \tag{4.147}$$

という関係もある．ここに，$\mathbf{v}' \stackrel{\text{def}}{=} -v^a\mathbf{E}'_a$ とおいた．(4.146) の第 1 式と (4.147) の第 1 式を用いると，(4.136)，(4.137) の関係が得られる．

$[O; (\vec{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)]$, $[O'; (\vec{E}'_0, \mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_3)]$ は共に正規直交座標枠である．(4.130) で定義される位置ベクトルを

$$\left.\begin{aligned} &\vec{x} = X^0\vec{E}_0 + X^a\mathbf{E}_a, \qquad \vec{x}' = X'^0\vec{E}'_0 + X'^a\mathbf{E}'_a \\ &\vec{h} = H^0\vec{E}_0 + H^a\mathbf{E}_a \end{aligned}\right\} \tag{4.148}$$

と表して，$\mathbf{x} \stackrel{\text{def}}{=} X^a\mathbf{E}_a$, $\mathbf{x}' \stackrel{\text{def}}{=} X'^a\mathbf{E}'_a$, $\mathbf{h} \stackrel{\text{def}}{=} h^a\mathbf{E}_a$ とおくと，$g(\vec{E}_0, \mathbf{x}) = 0 = g(\vec{E}'_0, \mathbf{x}')$, $g(\vec{E}_0, \mathbf{h}) = 0$ である．(4.131) の内容は，この場合も (4.133) で表され，$[O'; (\vec{E}'_0, \mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_3)]$ の $[O; (\vec{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)]$ に対する 3 次元的速度 $d\mathbf{x}/dt$，$[O; (\vec{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)]$ の $[O'; (\vec{E}'_0, \mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_3)]$ に対する 3 次元的速度 $d\mathbf{x}'/dt$ は (4.135) で与えられることがわかる．座標枠 $[O; (\vec{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2,$

$\mathbf{E}_3)]$, $[O'; (\vec{E}'_0, \mathbf{E}'_1, \mathbf{E}'_2, \mathbf{E}'_3)]$ に対する質点の 3 次元的速度をそれぞれ $\mathbf{U}, \mathbf{U}'$ と表すと，これらは (4.138) の関係にある．

とくに，$v^1 = v$, $v^2 = 0 = v^3$ である場合，(4.133)，(4.138) は，それぞれ入門書でよく見かける関係式

$$\left.\begin{aligned} X'^0 &= \gamma\left\{X^0 - H^0 - \frac{v}{c}(X^1 - H^1)\right\}, \qquad X'^2 = X^2 - H^2 \\ X'^1 &= \gamma\left\{X^1 - H^1 - \frac{v}{c}(X^0 - H^0)\right\}, \qquad X'^3 = X^3 - H^3 \end{aligned}\right\} \tag{4.149}$$

$$U^1 = \frac{U'^1 + v}{1 + \dfrac{vU'^1}{c^2}}, \qquad U^a = \frac{U'^a}{\gamma\left\{1 + \dfrac{vU'^1}{c^2}\right\}} \qquad (a = 2, 3) \tag{4.150}$$

に帰着する．ただし，$\mathbf{U} = U^a\mathbf{E}_a$, $\mathbf{U}' = U'^a\mathbf{E}'_a$ と表した．

4.2.3　4 次元テンソルと 3 次元テンソルの関係

次節において Minkowski 時空上のテンソル量を用いて，電磁気学と力学の理論を定式化する．

そのための準備として，4 次元 Minkowski 空間 $\mathcal{M}_4 = \{M_4; V_{o4}\}$ におけるテンソルと 3 次元空間 $\mathcal{S} = \{S; V_{oS}\}$ におけるテンソルとの関係をみておこう．V_{o4} の基底 $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ を $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ が V_{oS} の基底であるように選んでおく．

V_{o4} 上の共変ベクトル $v = v_\mu \vec{e}^\mu = v_0 \vec{e}^0 + v_\alpha \vec{e}^\alpha$ は V_{oS} 上の共変ベクトル $v_\alpha \vec{e}^\alpha$ とスカラー v_0 を定める．V_{o4} 上の 2 次交代形式 $T = \sum_{\mu<\nu} T_{\mu\nu} \vec{e}^\mu \wedge \vec{e}^\nu = T_{0\alpha}\vec{e}^0 \wedge \vec{e}^\alpha + \sum_{\alpha<\beta} T_{\alpha\beta} \vec{e}^\alpha \wedge \vec{e}^\beta$ は V_{oS} 上の共変ベクトル $T_{0\alpha}\vec{e}^\alpha$ と 2 次交代形式 $\sum_{\alpha<\beta} T_{\alpha\beta} \vec{e}^\alpha \wedge \vec{e}^\beta$ を定める．V_{o4} 上の 3 次交代形式 $A = \sum_{\mu<\nu<\lambda} A_{\mu\nu\lambda} \vec{e}^\mu \wedge \vec{e}^\nu \wedge \vec{e}^\lambda = \sum_{\alpha<\beta} A_{\alpha\beta} \vec{e}^0 \wedge \vec{e}^\alpha \wedge \vec{e}^\beta + A_{123}\vec{e}^1 \wedge \vec{e}^2 \wedge \vec{e}^3$ は V_{oS} 上の 2 次交代形式 $\sum_{\alpha<\beta} A_{0\alpha\beta} \vec{e}^\alpha \wedge \vec{e}^\beta$ と 3 次交代形式 $A_{123}\vec{e}^1 \wedge \vec{e}^2 \wedge \vec{e}^3$ を定める．V_{o4} 上の 1 階反変 3 階交代共変テンソル $\vec{T} = \sum_{\mu<\nu<\lambda} \vec{T}_{\mu\nu\lambda} \otimes (\vec{e}^\mu \wedge \vec{e}^\nu \wedge \vec{e}^\lambda) = \sum_{\mu<\nu<\lambda} T^\rho{}_{\mu\nu\lambda} \vec{e}_\rho \otimes (\vec{e}^\mu \wedge \vec{e}^\nu \wedge \vec{e}^\lambda) = \sum_{\alpha<\beta} \vec{T}_{0\alpha\beta} \otimes (\vec{e}^0 \wedge \vec{e}^\alpha \wedge \vec{e}^\beta) + \vec{T}_{123} \otimes (\vec{e}^1 \wedge \vec{e}^2 \wedge \vec{e}^3)$ は，V_{oS} 上の 2 次交代形式 $\sum_{\alpha<\beta} T^0{}_{0\alpha\beta} \vec{e}^\alpha \wedge \vec{e}^\beta$,

1 階反変 2 階交代共変テンソル $\sum_{\alpha<\beta} T^{\gamma}{}_{0\alpha\beta}\mathbf{e}_\gamma \otimes (\vec{e}^\alpha \wedge \vec{e}^\beta)$，3 次交代形式 $T^0{}_{123}\vec{e}^1 \wedge \vec{e}^2 \wedge \vec{e}^3$ および 1 階反変 3 階交代共変テンソル $T^\alpha{}_{123}\mathbf{e}_\alpha \otimes (\vec{e}^1 \wedge \vec{e}^2 \wedge \vec{e}^3)$ を定める．

V_{o4} 上の 2 階共変テンソル $t = t_{\mu\nu}\vec{e}^\mu \otimes \vec{e}^\nu = t_{00}\vec{e}^0 \otimes \vec{e}^0 + t_{0\alpha}\vec{e}^0 \otimes \vec{e}^\alpha + t_{\alpha 0}\vec{e}^\alpha \otimes \vec{e}^0 + t_{\alpha\beta}\vec{e}^\alpha \otimes \vec{e}^\beta$ は，V_{oS} 上のスカラー t_{00}，共変ベクトル $t_{0\alpha}\vec{e}^\alpha, t_{\alpha 0}\vec{e}^\alpha$，2 階共変テンソル $t_{\alpha\beta}\vec{e}^\alpha \otimes \vec{e}^\beta$ を定める．例えば V_{o4} の計量 $g = g_{\mu\nu}\vec{e}^\mu \otimes \vec{e}^\nu$ は V_{oS} の計量 $g_{\alpha\beta}\vec{e}^\alpha \otimes \vec{e}^\beta$ を定める．というよりは，むしろ最初から V_{o4} の計量と V_{oS} の計量とはこのような関係にあるものと考えているのである．さらに，V_{o4} 上の 4 次交代形式，4 階共変テンソルと V_{oS} 上の対応するテンソルについて同様の議論を行うことも容易である．

M_4 上の微分形式，共変テンソル場，反変ベクトル場値微分形式と S 上の微分形式，共変テンソル場，反変ベクトル場値微分形式の間にも上述の関係に対応する関係があることは容易に理解できるであろう．

次節では，上記のことを念頭において，3 次元の物理学を手がかりとして Minkowski 時空上の物理学を構成することにしよう．

4.3 電磁気学と質点の力学の 4 次元形式

電磁気学の法則を分析した結果,「時間と空間を合わせたものは Minkowski 時空である」と考えることが自然であることがわかり，この時空を前提として時計の進み方，速度，加速度を調べてきた．我々は「物理量はすべて Minkowski 時空におけるテンソル量であって，物理法則はこれらの量に関する方程式である」ことを前提としているのであった．以下では，この前提に基づいて電磁気学と力学の相対論的定式化を与えよう．

4.3.1 電磁気学

3 次元的扱いにあっては，電磁場の諸量は部分節 **4.1.2** の **(A)**，**(B)** でまとめたテンソル性をもつ．そこで，(X^0, X^1, X^2, X^3) を M_4 の任意の時空的−時間的−空間的に正の正規直交座標系（= 正規直交座標系でかつ時

空的－時間的－空間的に正の座標系）として，

$$F \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{c} E \wedge dX^0 + B$$
$$= \frac{1}{c} E_a dX^a \wedge dX^0 + \frac{1}{2\,!} B_{ab} dX^a \wedge dX^b \tag{4.151}$$
$$\tilde{F} \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{c} H \wedge dX^0 + D$$
$$= -\frac{1}{c} H_a dX^a \wedge dX^0 + \frac{1}{2\,!} D_{ab} dX^a \wedge dX^b \tag{4.152}$$
$$J \overset{\text{def}}{=} \rho^{(\mathrm{e})} - \frac{1}{c} j \wedge dX^0$$
$$= R^{(\mathrm{e})}{}_{123} dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3 - \frac{1}{2\,! c} j_{ab} dX^a \wedge dX^b \wedge dX^0 \tag{4.153}$$

とおいて，$F, \tilde{F}$ **は共に** M_4 **上の 2－ 形式であり，** J **は** M_4 **上の 3－ 形式であるものと仮定する**[52)]．すると，**電磁場の基礎方程式（Maxwell の方程式）** (4.36) は，

$$dF = 0, \qquad d\tilde{F} = J \tag{4.154}$$

という時空の座標系のとり方によらない式にまとまる．この最初の式が，(4.36) の第 1 および第 2 式を与え，2 番目の式が (4.36) の第 3 および第 4 式を与える．3 次元形式では 4 つあった式が 2 つの式にまとまったのである．**4 次元形式に現れる微分演算は外微分のみであり，3 次元形式におけるのとは異なって，「時間変数** t **による偏微分」などは現れない**ことを強調しておきたい．

(4.154) の第 1 式と Poincaré の補題により，M_4 上の 1－ 形式 A であって，

$$F = dA \tag{4.155}$$

であるものが存在する．$A = A_i dX^i$ と表して $\varphi \overset{\text{def}}{=} -cA_0$, $A^{(3)} \overset{\text{def}}{=} A_a dX^a$ とすると，(4.155) の内容は $B = d^{(3)} A^{(3)}$, $E = -d^{(3)}\varphi - \partial A^{(3)}/\partial t$ ，すな

52) これは新たな仮定であって，3 次元形式での電磁気学からの論理的帰結ではない．この仮定の妥当性は，それに基づいて構成される相対論的電磁気学の成功によって保証されている．なお，(4.151)，(4.152) において，E と B が同格，H と D とが同格および $\rho^{(\mathrm{e})}$ と j とが同格のものとして扱われていることに注意しよう．

わち (4.39) と同等であることがわかる．ただし，$d^{(3)}$ は S における外微分の演算を表し，また $t \stackrel{\mathrm{def}}{=} X^0/c$ とする．また，λ を M_4 上の任意の 0− 形式とすると，ゲージ変換 (4.73) の内容は

$$A' = A + d\lambda \tag{4.156}$$

と表され，$F = dA' = dA$ である．

(4.154) の第 2 式の両辺の外微分をとって命題 3.8.3 を用いると

$$dJ = d^2\tilde{F} = 0 \tag{4.157}$$

が得られるが，これは微分形での電気量の保存則 (4.38) と一致する．

M_4 における空間的超曲面 Σ を考える[53]．

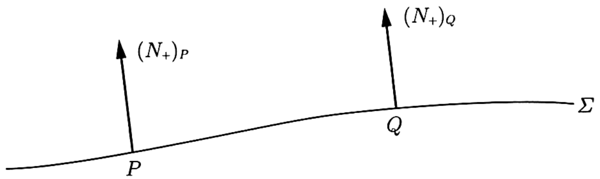


図 4.4　空間的超曲面 Σ

定義 3.7.1 とそれに続く記述によれば，Σ は向き付け可能である．その定義における連続な法ベクトル場 N は，$g_P(N_P, N_P) < 0, \forall P \in \Sigma$ を満足するから，

条件： $N_P \in \mathcal{Z}_+, \forall P \in \Sigma$, あるいは $N_P \in \mathcal{Z}_-, \forall P \in \Sigma$

が満足される[54]．$N_P \in \mathcal{Z}_+, \forall P \in \Sigma$ を満足する N を N_+ と記すことにして，命題 3.7.4 の証明における (3.55) において N のところを N_+ で置き換

---

53) 空間的超曲面の概念は，相対論的場の理論の共変形式の定式化に際して朝永によって導入された．正の時間的ベクトル $(N_+)_P$ は点 P における時間の向きを与えるが，これは一般に Σ 上の各点ごとに異なり，空間的超曲面上の各点ごとに異なる時間，異なる時刻があてがわれることになる．朝永の理論は，この意味で超多時間理論とよばれる．Minkowski 時空 $\mathcal{M}_4$ は空間的超曲面の直和に分解（すなわち “薄切り”）される．これは，慣性系を定めた上での各時刻における物理的 3 次元空間への時空の “薄切り” の一般化である．

54) 定義 1.3.4 を参照．

えたもので定まる 3– 形式 ω が体積要素であるように Σ は向き付けられているものとする.

σ を Σ の有界領域として,

$$Q(\sigma) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_\sigma J \tag{4.158}$$

とおく. とくに O を M_4 の任意の点として慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ をとったとき, Σ が $X^0 =$ 一定なる超曲面の場合は, $V = \sigma$ は $[O; \vec{E}_0]$ における時刻 X^0/c での物理的 3 次元空間の有界領域であるが, このとき $Q(V) = Q(\sigma)$ は

$$Q(V) = \iiint_V R^{(\mathrm{e})}{}_{123} dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3 \tag{4.159}$$

となる. これは V 内の電気量である. 一般に (4.158) で与えられる $Q(\sigma)$ は Σ の領域 σ 上の電気量を表す.

図のような空間的超曲面 Σ_i $(i = 1, 2)$ の部分曲面 σ_i とそれらの間を繋ぐ筒状の曲面 C の和集合 $\partial\Omega \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup C$ を滑らかな境界としてもつ 4 次元的有界領域 Ω を考える.

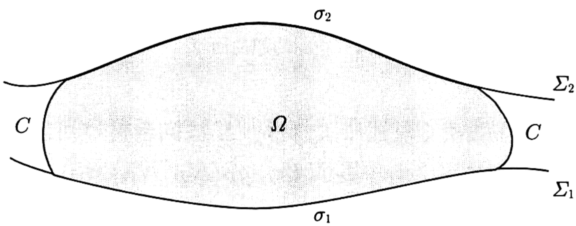


図 4.5 領域 Ω とその境界 $\partial\Omega$

Ω の向きは, それによって誘導された $\partial\Omega$ の向きによって自然に定まる σ_2 の正の向きと σ_1 の負の向きが, それぞれ Σ_2, Σ_1 の向きにおける正の向きになるように指定されているものとすると

$$Q(\sigma_2) - Q(\sigma_1) + \int_C J = \int_{\partial\Omega} J = \int_\Omega dJ = 0 \tag{4.160}$$

である. ここに Stokes の定理 (= 命題 3.10.5) および (4.157) を用いた.

なお,

$$Q(\sigma_i) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\sigma_i} J \qquad (i=1,2) \tag{4.161}$$

である．したがって，とくに

$$\int_C J = 0 \tag{4.162}$$

である場合，例えば J が空間的遠方で十分に速く 0 に近づき，C が相応に遠方にある場合には

$$Q(\sigma_2) = Q(\sigma_1) \tag{4.163}$$

となるが，これは電気量の保存則を表す.

以下，本部分節の終わりまで真空中の電磁場を考察する．真空中では D と E，B と H は (4.41) で与えられる関係にある．この関係と次の (4.164) の第 1 式（およびそれと等価な第 2 式）とは互いに同等である：

$$\star F = c|\mu_0|\tilde{F}, \qquad \star\tilde{F} = -c|\varepsilon_0|F \tag{4.164}$$

(4.164) の第 1 式と (4.41) の同等性は次のようにして示される[55]．前にも述べたように，(4.41) は (4.52) と同等である．また，(3.58) の特別な場合として，

$$\left.\begin{aligned}
&\star 1 = dX^0 \wedge dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3 \\
&\star(dX^i) = \frac{1}{3!}E^i{}_{jkl}dX^j \wedge dX^k \wedge dX^l \\
&\star(dX^i \wedge dX^j) = \frac{1}{2!}E^{ij}{}_{kl}dX^k \wedge dX^l \\
&\star(dX^i \wedge dX^j \wedge dX^k) = E^{ijk}{}_l dX^l \\
&\star(dX^0 \wedge dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3) = E^{0123} = -1
\end{aligned}\right\} \tag{4.165}$$

が成り立つ．ただし，E_{ijkl} を $E_{0123}=1$ であって添数 $ijkl$ について交代である量として，$E^i{}_{jkl} \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{im}E_{mjkl}$, $E^{ij}{}_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{im}\eta^{jn}E_{mnkl}$ 等としている[56]．(4.151) の両辺に $\star$ を作用させて (4.52)，(4.56) および (4.165) を用いると，(4.164) の第 1 式が得られる．逆に (4.164) の第 1 式が成り立てば

---

55) これらの式に現れる量は，すべてテンソル量である．したがって，特定の座標系についてある関係が成り立てば，その関係は座標系に無関係に成り立つことになる.

56) E_{0abc} を真空の誘電率の成分を表す記号 $E_{(0)abc}$ と混同しないこと.

(4.41) も成り立つことが容易に示され，かくてこれら両式が互いに同等であることがわかる．(4.164) の第 1 式と第 2 式の同等性は (3.62) を用いることにより示される．

F の満足する**波動方程式**を導こう．(4.103) によれば

$$\Box F = -d \star d \star F - \star d \star dF \tag{4.166}$$

であるが，この式の右辺に (4.164) の第 1 式，(4.154) を用いることにより，波動方程式

$$\Box F = -c|\mu_0| d \star J \tag{4.167}$$

が得られる．なお，容易に確かめられるように (4.167) は $\Box \tilde{F} = -\star d \star J$ と同等であり，さらに 3 次元形式の波動方程式 (4.55) と (4.63) を併せたものと「同等」である．しかし,「4 次元的扱いにおける **$\Box$ は M_4 の座標系に無関係な演算**であり，したがって Lorentz 座標変換を含む**任意の座標変換のもとで不変である**」のに対して,「3 次元形式における表示 $\Delta - (1/c^2)\partial^2/\partial t^2$ は Galilei 変換のもとで不変ではない」ことに注意しよう．

1− 形式 A の満足する波動方程式を導こう．

$$\Box A = -d \star d \star A - \star d \star dA \tag{4.168}$$

であるが，(4.154) の第 2 式と (4.164) の第 1 式を用いると，$\star d \star dA = \star d \star F = c|\mu_0| \star d\tilde{F} = c|\mu_0| \star J$ である．そこで，A を

$$d \star A = 0 \tag{4.169}$$

を満足するように選ぶと，(4.68) および (4.72) を合わせたものと同等な

$$\Box A = -c|\mu_0| \star J \tag{4.170}$$

を得る．なお，(4.169) の内容は Lorenz 条件 (4.65) と同等である．

電磁場のエネルギー密度，運動量密度等，エネルギーおよび運動量の 4 次元的表示を求めよう．$F, \tilde{F}$ を

$$F = \frac{1}{2!} F_{ij} dX^i \wedge dX^j, \qquad \tilde{F} = \frac{1}{2!} \tilde{F}_{ij} dX^i \wedge dX^j \tag{4.171}$$

と表す．ただし，$F_{ij}=-F_{ji}, \tilde{F}_{ij}=-\tilde{F}_{ji}$ とする．そして，

$$\left.\begin{aligned}
&T^l{}_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} \eta^{lm}T_{mijk}, \qquad T_{lijk} \stackrel{\text{def}}{=} -\tilde{F}_{[ij}F_{k]l} + \int_0^F \tilde{F}_{[ij}dF_{kl]}\\
&\tilde{F}_{[ij}F_{k]l} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}_{ij}F_{kl} + \tilde{F}_{ki}F_{jl} + \tilde{F}_{jk}F_{il}\\
&\tilde{F}_{[ij}dF_{kl]} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{F}_{ij}dF_{kl} + \tilde{F}_{il}dF_{jk}\\
&\qquad\qquad +\tilde{F}_{ik}dF_{lj} + \tilde{F}_{kl}dF_{ij} + \tilde{F}_{jk}dF_{il} + \tilde{F}_{lj}dF_{ik}\\
&T^k{}_{\mu\nu\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} e^l{}_\mu e^m{}_\nu e^n{}_\lambda T^k{}_{lmn}
\end{aligned}\right\} \tag{4.172}$$

とおいて

$$\begin{aligned}
\vec{T} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3!}T^l{}_{ijk}\vec{E}_l \otimes (dX^i \wedge dX^j \wedge dX^k)\\
&= \frac{1}{3!}T^k{}_{\mu\nu\lambda}\vec{E}_k \otimes (dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda)
\end{aligned} \tag{4.173}$$

で定義される反変ベクトル場値 3− 形式を考え，これを**電磁場のエネルギー運動量密度**とよぶ．ここに，(x^0, x^1, x^2, x^3) は M_4 の任意の正の局所座標系を表し，$(\vec{E}_0, \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3) = (\vec{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)$ は座標系 (X^0, X^1, X^2, X^3) に対応する時空的−時間的−空間的に正の正規直交座標枠 $[O; (\vec{E}_0, \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)] = [O; (\vec{E}_0, \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)]$ における基底を表す．ここで，$\vec{T}$ の外微分 $d\vec{T}$ を (4.151)〜(4.153)，(4.172) および (4.173) を用いて計算すると，

$$d\vec{T} = \vec{f} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa\{(\star J) \oslash F\} \otimes (\star 1) \tag{4.174}$$

となる．$\vec{f}$ は反変ベクトル場値 4− 形式であって

$$\left.\begin{aligned}
&J = \frac{1}{3!}J_{ijk}dX^i \wedge dX^j \wedge dX^k\\
&f^m{}_{ijkl} \stackrel{\text{def}}{=} -J_{ijk}F_l{}^m + J_{lij}F_k{}^m - J_{kli}F_j{}^m + J_{jkl}F_i{}^m\\
&f^m{}_{\mu\nu\lambda\rho} \stackrel{\text{def}}{=} e^i{}_\mu e^j{}_\nu e^k{}_\lambda e^l{}_\rho f^m{}_{ijkl}
\end{aligned}\right\} \tag{4.175}$$

とすると

$$\begin{aligned}
\vec{f} &= \frac{1}{4!}f^m{}_{ijkl}\vec{E}_m \otimes (dX^i \wedge dX^j \wedge dX^k \wedge dX^l)\\
&= \frac{1}{4!}f^m{}_{\mu\nu\lambda\rho}\vec{E}_m \otimes (dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \wedge dx^\rho)
\end{aligned} \tag{4.176}$$

と表される．関係式 (4.174) は，3 次元形式における 2 つのつり合いの式 (4.80)，(4.93) を 4 次元的に統一したものであり，**エネルギー運動量のつり合いの式**とよばれる．

電磁場のエネルギー運動量密度 $\vec{T}$ および反変ベクトル場値 4− 形式 $\vec{f}$ は 3 次元形式における諸量を用いて

$$\vec{T} = \vec{E}_0 \otimes \left(\frac{1}{c}u - \frac{1}{c^2}dX^0 \wedge s\right) + \frac{1}{c}dX^0 \wedge \mathbf{T} + \mathbf{p} \qquad (4.177)$$

$$\vec{f} = -\frac{1}{c^2}\vec{E}_0 \otimes \left(dX^0 \wedge j \wedge E\right) - \frac{1}{c}dX^0 \wedge \mathbf{f} \qquad (4.178)$$

と表される．

σ を (4.158) のところで考えた M_4 における空間的超曲面 Σ の有界領域として

$$\vec{P}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\sigma \vec{T} = P^l(\sigma)\vec{E}_l, \qquad P^l(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{3!}\iiint_\sigma T^l{}_{\mu\nu\lambda}dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda \qquad (4.179)$$

で定義される反変ベクトル $\vec{P}(\sigma)$ を σ 上の**電磁場のエネルギー運動量**とよぶ．なお，(4.179) において，添数 l はその第 2 式に現れる添数 μ, ν, λ とは無関係であることを注意しておこう．Σ が $X^0 =$ 一定なる超曲面である場合は，

$$\vec{P}(V) = P^l(V)\vec{E}_l, \qquad P^l(V) = \iiint_V T^l{}_{(1)(2)(3)}dX^1 \wedge dX^2 \wedge dX^3 \qquad (4.180)$$

が $V \stackrel{\text{def}}{=} \sigma$ 上の電磁場のエネルギー運動量ということになる．なお，上の式において $T^l{}_{(1)(2)(3)} \stackrel{\text{def}}{=} T^l{}_{ijk}|_{(i,j,k)=(1,2,3)}$ である．

$$cP^0(V) = U(V) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V u, \qquad P^a(V)\mathbf{E}_a = \mathbf{P}(V) \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \mathbf{p} \qquad (4.181)$$

であることは (4.177) から明らかであろう．$U(V)$, $\mathbf{P}(V)$ は，それぞれ時刻 X^0/c における物理的 3 次元空間の有界領域 V 内にある電磁場のエネルギーおよび運動量である．一般に，任意の空間的超曲面 Σ の有界領域 σ について，$cP^0(\sigma)$ と $\mathbf{P}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} P^a(\sigma)\mathbf{E}_a$ は，それぞれ慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ における，σ 上のエネルギーおよび運動量を表す．

Ω および $\partial\Omega = \sigma_1 \cup \sigma_2 \cup C$ を，それぞれ電気量の保存則 (4.163) のところで考えた 4 次元的領域とその境界とすると，反変テンソル場値微分形式に対する Stokes の定理（= 命題 3.11.1）と (4.174) を用いて，

$$\vec{P}(\sigma_2) - \vec{P}(\sigma_1) + \int_C \vec{T} = \int_{\partial\Omega} \vec{T} = \int_\Omega d\vec{T} = \int_\Omega \vec{f} \qquad (4.182)$$

を得る．ここに，

$$\vec{P}(\sigma_i) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\sigma_i} \vec{T} \qquad (i = 1, 2) \qquad (4.183)$$

とした．一般に電磁場と荷電物質とが相互作用している場合には，電磁場，荷電物質の各々のエネルギー運動量は保存しないが，(4.182) においてとくに

$$\int_C \vec{T} = \vec{0} = \int_\Omega \vec{f} \qquad (4.184)$$

である場合，例えば，電流密度 J が時空の至る所で 0 であり，電磁場が空間的遠方では十分に速く 0 に近づき，かつ C が相応に遠方にある場合には，

$$\vec{P}(\sigma_2) = \vec{P}(\sigma_1) \qquad (4.185)$$

となる．すなわち，このとき電磁場のエネルギー運動量は保存する．なお，$J \equiv 0$ であるとき $\vec{f} \equiv \vec{0}$ となり，(4.174) は $d\vec{T} = \vec{0}$ に帰着するが，これはこの場合の電磁場のエネルギー運動量が単独で保存するを表している．

次に，電磁場の 4 次元角運動量について考える．Minkowski 時空の任意の定点 A と (4.173) に続く部分で述べた正規直交座標枠 $[O; (\vec{E}_0, \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)]$ をとる．$\vec{A} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{OA}$ とおき，また時空内の点 P に対して $\vec{X} \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{OP}$ として，

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\stackrel{\text{def}}{=} (\vec{X} - \vec{A}) \curlywedge \vec{T} \\ &= \frac{1}{2!}(\vec{E}_i \curlywedge \vec{E}_j) \otimes \{(X^i - A^i)T^j - (X^j - A^j)T^i\} \end{aligned} \qquad (4.186)$$

で定義される 2 階交代反変テンソル場値 3− 形式 $\mathcal{L}$ を考える．ここに，$\vec{X} = X^i\vec{E}_i$, $\vec{A} = A^i\vec{E}_i$, $\vec{T} = \vec{E}_i \otimes T^i$ と表した．各 T^i $(i = 0, 1, 2, 3)$ は 3− 形式である．(4.172)〜(4.174) を用いると，外微分 $d\mathcal{L}$ に対して

$$d\mathcal{L} = (\vec{X} - \vec{A}) \curlywedge \vec{f} \qquad (4.187)$$

が成り立つことがわかる．この式の両辺を先にも考えた領域 Ω 上で積分して反変テンソル場値微分形式に対する Stokes の定理を用いると，

$$L(\sigma_2) - L(\sigma_1) + \int_C \mathcal{L} = \int_{\partial\Omega} \mathcal{L} = \int_\Omega d\mathcal{L} = \int_\Omega (\vec{X} - \vec{A}) \curlywedge \vec{f} \tag{4.188}$$

が得られる．ここに

$$L(\sigma) \overset{\text{def}}{=} \int_\sigma \mathcal{L} \tag{4.189}$$

とおいた[57)]．

$\mathcal{L}$ と 3 次元の角運動量密度 $\mathcal{L}^{(3)}$，電磁場の応力を表す 2− 形式 $\mathbf{T}$，運動量密度 $\mathbf{p}$，Poynting の 2− 形式 s，エネルギー密度 u との関係は[58)]

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}^{ab} &= \frac{1}{c} dX^0 \wedge \{(X^a - A^a)\mathbf{T}^b - (X^b - A^b)\mathbf{T}^a\} + (\mathcal{L}^{(3)})^{ab} \\ \mathcal{L}^{0a} &= \frac{1}{c}(X^0 - A^0) dX^0 \wedge \mathbf{T}^a + (X^0 - A^0)\mathbf{p}^a \\ &\qquad + \frac{1}{c^2}(X^a - A^a) dX^0 \wedge s - \frac{1}{c}(X^a - A^a) u \end{aligned}\right\} \tag{4.190}$$

で与えられる．ここに，$a, b = 1, 2, 3$ であり，$\vec{X} = X^0 \vec{E}_0 + \mathbf{X}$, $g(\vec{E}_0, \mathbf{X}) = 0$, $\vec{A} = A^0 \vec{E}_0 + \mathbf{A}$, $g(\vec{E}_0, \mathbf{A}) = 0$, $\mathcal{L} = (1/2\,!)(\vec{E}_i \curlywedge \vec{E}_j) \otimes \mathcal{L}^{ij}$, $\mathcal{L}^{(3)} = (1/2\,!)(\vec{E}_a \curlywedge \vec{E}_b) \otimes (\mathcal{L}^{(3)})^{ab}$, $\mathbf{T} = \vec{E}_a \otimes \mathbf{T}^a$, $\mathbf{X} = X^a \vec{E}_a$ と表した．なお，$\mathcal{L}^{ij}$, $(\mathcal{L}^{(3)})^{ab}$ は添数について交代であるものとする．

Σ が $X^0 =$ 一定なる超曲面の場合は，$V = \sigma$ は慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ における時刻 X^0/c での空間のある領域を表すことになるが，このとき

$$L^{ab}(V) = \int_V \mathcal{L}^{ab} = \int_V (\mathcal{L}^{(3)})^{ab} = (L^{(3)}(V))^{ab} \tag{4.191}$$

となる．右辺は V 内の電磁場の 3 次元理論における角運動量の成分を表す．そこで，$\mathcal{L}$ を**電磁場の A の周りの 4 次元角運動量密度**，$L(\sigma)$ を σ 上の**電磁場の A の周りの 4 次元角運動量**とよぶことする．(4.187) は (4.98)

57) $\vec{T}$, $\vec{f}$, $\vec{P}(\sigma)$, $\mathcal{L}$ および $L(\sigma)$ は座標枠，座標系に依存しないことを強調しておく．

58) この式の右辺における $\wedge$ は交代共変テンソル場（微分形式）としての外積を表す．

の 4 次元的一般化であり，**電磁場の 4 次元角運動量のつり合いの式** という．(4.188) において

$$\int_C \mathcal{L} = 0 = \int_\Omega (\vec{X} - \vec{A}) \curlywedge \vec{f} \tag{4.192}$$

の場合には

$$L(\sigma_2) = L(\sigma_1) \tag{4.193}$$

となるが，これは電磁場の世界点 A の周りの 4 次元角運動量の保存を意味する．

なお，(4.174)，(4.187) によれば，電磁場と荷電物質が共存している場合，電磁場単独のエネルギー運動量，4 次元角運動量は一般には保存しない．しかし，荷電物質をも含めた全系についてはこれらの物理量は保存することが示される．また，電気分極や磁化を無視できない物質中の電磁場のエネルギー運動量，4 次元角運動量とそれらのつり合いの式，保存則も真空中の電磁場の場合の自然な一般化として考えることができる．

電磁気学の 4 次元形式については一応の区切りとして，次に力学について考えよう．

4.3.2　質点の力学

3 次元理論では，それぞれスカラー，反変ベクトルであった**電磁場のエネルギーと運動量とは，4 次元理論においては単一の量である 4 次元反変ベクトルを構成する**ことがわかった．したがって，**理論の整合性から質点のエネルギーと運動量も 4 次元反変ベクトルを構成すべき**こととなる．もしそうでないと，電磁場と質点とが共存する系のエネルギー，運動量が定義されないことになってしまうからである．Newton 力学においては，エネルギーも運動量も速度ベクトル $\mathbf{v}(t)$ のみの関数であって，質量 m に比例するものであり，運動量は $m\mathbf{v}(t)$ であった．Minkowski 時空においては，4 元速度 $\vec{u}(\tau)$ が，Newton 理論における速度ベクトル $\mathbf{v}(t)$ に相当する．したがって，特殊相対論的力学における質量 m の**質点のエネルギー運動量**は

$$\vec{P}(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{u}(\tau) = m\frac{D\Gamma(\tau)}{D\tau} \tag{4.194}$$

で定義される $\vec{P}(\tau)$ であるとするのが妥当であろう．ここに Γ は質点の世界線を表す．(4.112) から，

$$g(\vec{P}(\tau), \vec{P}(\tau)) = -(mc)^2 \tag{4.195}$$

である．

慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ を用いて4元速度を (4.120) と表すと，エネルギー運動量は $\vec{P} = P^0\vec{E}_0 + \mathbf{P}$, $P^0 \stackrel{\text{def}}{=} mu^0$, $\mathbf{P} \stackrel{\text{def}}{=} m\mathbf{u}$ と表される．(4.125) から，

$$W \stackrel{\text{def}}{=} cP^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2\left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots\right) \tag{4.196}$$

$$\mathbf{P} = \frac{m\mathbf{U}(t)}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\mathbf{U}(t)\left(1 + \frac{\beta^2}{2} + \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots\right) \tag{4.197}$$

を得る．(4.197) は，$\beta = |\mathbf{U}(t)|/c \ll 1$ のとき $\mathbf{P}$ は Newton 理論における運動量に近似的に一致しており，定義 (4.194) が合理的であることを示している．また，(4.196) と (4.197) から $W = c\sqrt{g(\mathbf{P}, \mathbf{P}) + m^2c^2} \geq mc^2$ を得る．$\vec{P}(\tau)$ は正の時間的ベクトルである．

電磁気学におけるエネルギー運動量 $\vec{P}(\sigma)$ については，$cP^0(\sigma), \mathbf{P}(\sigma)$ がそれぞれエネルギーと運動量であるから，質点については $W \stackrel{\text{def}}{=} cP^0, \mathbf{P}$ がそれぞれエネルギーと運動量であるということになる．$\beta = 0$ すなわち $\mathbf{U}(t) = \mathbf{0}$ のとき $W = mc^2$ であり，これを質点の**静止エネルギー**という[59)]．

特殊相対論における**運動エネルギー**を $K_R \stackrel{\text{def}}{=} W - mc^2$ で定義する．日常我々が目にする物体の運動の場合は，$|\mathbf{U}(t)| \ll c$ であり，したがって $K_R = W - mc^2 \fallingdotseq m|\mathbf{U}(t)|^2/2 \lll mc^2$ である．すなわち，この場合は，K_R は Newton 理論における運動エネルギーに近似的に等しく，また静止エネルギーは運動エネルギーに比べて圧倒的に大きい．

Newton 力学における慣性の法則を特殊相対論の立場から見直してみよう．部分節 **4.2.1** で述べたように，我々は「真空中の光の速さよりも速く伝播する作用は存在しない」ことを前提としている．そうすると，Newton 力学における「他の物質が存在しないか，あるいは存在するとしてもそれらのすべてから十分遠く離れている」に対しては，特殊相対論においては

59) これに対応して，m のことを**静止質量**とよぶこともある．

「問題にしている質点の世界点の因果的過去には他の物質が存在しないか，存在するとしても十分に遠い過去である」が対応する.「このような状況に置かれている質点のエネルギー運動量は一定であり，したがって (4.194) からわかるように，その世界線は時間的直線あるいはその一部分である」と考えられる．また，世界線が時間的直線あるいはその一部分であるような運動をする質点のエネルギー運動量は一定である.

第 2 章の部分節 **2.2.3** の最後の部分からわかるように，各慣性系に対応して $\mathcal{M}_4$ の 3 次元 Euclid 空間への“薄切り”が存在するが，“薄切り”の 1 枚 1 枚は物理的には各時刻毎の物理的空間を表している．また，時間 $\{M_{4\vec{E}_0};[\vec{E}_0]\}$ を世界線とする質点の 4 次元的位置（=世界点）を $Q(\tau) = O + \vec{Y}(\tau) = O + Y^0(\tau)\vec{E}_0 + \mathbf{Y}(\tau)$, $g(\vec{E}_0, \mathbf{Y}(\tau)) = 0$ と表すと $\mathbf{Y}(\tau) \equiv \mathbf{0}$, したがって $d\mathbf{Y}(\tau)/d\tau \equiv \mathbf{0}$ となり，その 4 元速度は，$(dY^0(\tau)/d\tau)\vec{E}_0$ である．空間的位置を表すベクトル $\mathbf{Y}(\tau)$ が恒等的に零ベクトル $\mathbf{0}$ であるから，この時計は運動の間中，各時刻での物理的空間の原点に静止している．$\vec{E}_0$ は時間的単位ベクトルであるから

$$g\left(\frac{dY^0(\tau)}{d\tau}\vec{E}_0, \frac{dY^0(\tau)}{d\tau}\vec{E}_0\right) = -c^2 \tag{4.198}$$

となる．したがって，この直線を世界線として慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ での時刻 t_a から t_b $(t_a < t_b)$ まで運動した時計が示す運動中の経過時間（固有時間）τ は，$\tau = t_b - t_a$ である．かくて，時間 $\{M_{4\vec{E}_0};[\vec{E}_0]\}$ は，この直線を世界線とする時計（すなわち，慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ に対して静止している時計）の刻む物理的時間を表すことがわかった．また，(4.126) から導かれるように，この時計の 4 元加速度 $D^2\vec{Y}(\tau)/D\tau^2$ も零ベクトル $\vec{0}$ である.

先ほど述べた，エネルギー運動量が一定で，したがって世界線が時間的直線あるいはその一部分であるような質点の運動を慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ を用いて記述してみよう．質点の位置をこの慣性系における時間 $\{M_{4\vec{E}_0};[\vec{E}_0]\}$ を表すパラメーター $t = Y^0/c$ の関数として $P(t)$ と記すと

$$P(t) = O + ct\vec{E}_0 + \mathbf{X}(t), \qquad g(\vec{E}_0, \mathbf{X}(t)) = 0 \tag{4.199}$$

と表される．この質点の世界線 $\{P(t)|t \in R\}$ は直線であるから，4 元速度 $c\vec{E}_0 + d\mathbf{X}(t)/dt$ は一定である．したがって,「その質点の世界点の因果的過

去には他の物体が存在しないか，存在するとしても十分に遠い過去である」ような質点を慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ を用いて記述すると，その4元速度は一定であるということになる．かくて，$[O;\vec{E}_0]$ **は Newton 力学における慣性系に相当する**ものであることがわかった．

実験的検証によれば，この意味での慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ について，光速度の不変性が高い精度で成り立っている．

ところで，**慣性系の我々の定義は特殊相対論の多くの本で見かけるものとは異なっている**．通例の扱いにおける慣性系は，本書の言葉で表現すれば，時間的に正[60] の正規直交座標枠 $[O;(\vec{E}_0,\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3)]$ のことである．大雑把にいえば，「我々の意味での慣性系において，さらに空間部分の正規直交基底 $(\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3)$ を定めたものが通例の扱いにおける慣性系」である．しかし，これまでの議論からわかるように，**慣性系を物理的に規定する上で本質的なのは，正の時間的単位ベクトル** $\vec{E}_0$ であって，空間部分の正規直交基底 $(\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3)$ は "どうでもよいもの" である．$[O;\vec{E}_0]$ における原点 O も慣性系にとっては非本質的である．しかし，「$[O;\vec{E}_0]$ による Minkowski 分解」という文脈で議論する場面が多いという事情に鑑み，本書では「$[O;\vec{E}_0]$ のことを慣性系とよぶ」ことにした．

質点の運動方程式を考えよう．エネルギー運動量 $\vec{P}(\tau)$ は (4.194) で与えられるから，力 $\vec{F}$ の作用を受けて運動している質点の運動方程式は

$$\frac{D\vec{P}(\tau)}{D\tau}=\vec{F} \tag{4.200}$$

であるとするのが妥当であろう．ここに $D\vec{P}(\tau)/D\tau$ は，$\vec{P}(\tau)$ の Γ に沿う絶対微分であり，$\Gamma(\tau)$ の近傍における局所座標系 (x^0,x^1,x^2,x^3) を用いて $\vec{P}(\tau)=P^\mu(\tau)(\partial/\partial x^\mu)_{\Gamma(\tau)}$ と表して

$$\frac{D\vec{P}(\tau)}{D\tau}\overset{\text{def}}{=}\left[\frac{dP^\mu(\tau)}{d\tau}+\left\{\begin{matrix}\mu\\ \rho\ \nu\end{matrix}\right\}\Big(\Gamma(\tau)\Big)\frac{d\Gamma^\rho(\tau)}{d\tau}P^\nu(\tau)\right]\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_{\Gamma(\tau)} \tag{4.201}$$

と定義されている．とくに (x^0,x^1,x^2,x^3) が座標枠 $[O;(\vec{e}_0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)]$ に関する座標系である場合には，$D\vec{P}(\tau)/D\tau=(dP^\mu(\tau)/d\tau)\vec{e}_\mu$ となる．

60） 定義 2.2.1 を参照．

$\vec{F}$ のことを **4 元力**（あるいは **Minkowski 型の力**）とよぶ．$D\vec{P}(\tau)/D\tau$ はベクトルであるから，$\vec{F}$ もベクトルであるべきことになる．

(4.195)，(4.200) から示されるように，m が時間的に一定であるための必要十分条件は

$$g(\vec{F}, \vec{P}(\tau)) = 0 \tag{4.202}$$

が成り立つことである．$\vec{P}(\tau)$ は時間的ベクトルであるから，この場合の 4 元力 $\vec{F}$ は零ベクトルであるか空間的ベクトルである．したがって，**4 元力 $\vec{F}$ が光的あるいは時間的である場合は，m は時間的に一定ではあり得ない**[61]．

質点の質量 m が時間的に一定，すなわち $dm/d\tau = 0$ である場合には，(4.200) は

$$m\vec{a}(\tau) = m\frac{D\vec{u}(\tau)}{D\tau} = \vec{F} \tag{4.203}$$

となる．

慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ を用いた場合，エネルギーの増加率 dW/dt と運動量の変化率 $d\mathbf{P}/dt$ は (4.125) の第 1 式と (4.196) および (4.197) から

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = c\sqrt{1-\beta^2}F^0 \tag{4.204}$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{U}(t)}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \mathbf{K} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{1-\beta^2}\mathbf{F} \tag{4.205}$$

となる．ただし，$\vec{F} = F^0\vec{E}_0 + \mathbf{F}$, $g(\vec{E}_0, \mathbf{F}) = 0$ と表した．(4.205) は Newton の運動方程式 (4.12) に相当するものであり，$\mathbf{K}$ のことを **Newton 型の力**という．とくに，$\vec{F}$ が (4.202) を満足する場合には

$$c\sqrt{1-\beta^2}F^0 = g(\mathbf{U}, \mathbf{K}) \tag{4.206}$$

である．したがって，このとき，(4.204) は「質点のエネルギーの時間的変化率は力 $\mathbf{K}$ が単位時間に質点にする仕事に等しい」ことを示している．この場合の $d(cP^0)/dt = g(\mathbf{U}, \mathbf{K})$ に基づいて「cP^0 は質点のエネルギー ＋

61）「m が時間的に一定でなく，かつ $\vec{F}$ が零ベクトルまたは空間的ベクトルである」ということはあり得る．

定数 k である」と述べ，さらに「$k=0$ ととると実験事実と整合する」として,「$cP^0=$ 質点のエネルギー」を導いている本もある．電磁場のエネルギーとの対応に基づく前述の議論では「実験との照合を俟つことなく，理論の内的整合性から $k=0$ が帰結している」ことに注意しよう．**Newton 力学の枠内では決めようのなかったエネルギーの絶対的基準が定まり，静止エネルギーの存在が理論的帰結として得られた**のである．これは特殊相対論の重要な成果の 1 つである．

電磁場 F 中の点電荷の運動を考えよう．3 次元形式では，電磁場中を運動する点電荷に作用する力は (4.28) で与えられる．この表示と，F の電場 E，磁束密度 B による表示 (4.151)，4 元速度 $\vec{u}$ と 3 次元的速度との関係 (4.125) から考えて，電気量 q，4 元速度 $\vec{u}$ の点電荷に作用する電磁力は, $q, F, \vec{u}$ のすべてについて線型な 4 次元反変ベクトルであろうと推定される．そこで (4.28) を手掛かりに，世界点 P にある点電荷の固有時刻を τ とするとき，$\vec{u}(\tau)$ と $\kappa(F(P))$ の演算積を用いて

$$\vec{f}(P) \overset{\text{def}}{=} q\kappa(F(P)) \oslash \vec{u}(\tau) = -q\vec{u}(\tau) \oslash \kappa(F(P)) \tag{4.207}$$

と定義される反変ベクトル $\vec{f}(P)$ を考える．慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ をとり[62]，$\vec{f} = f^0\vec{E}_0 + \mathbf{f}$, $g(\vec{E}_0, \mathbf{f}) = 0$ と表して，(4.151) を用いると，$f^0, \mathbf{f}$ の 3 次元的表示

$$\left.\begin{aligned} f^0 &= \frac{q}{c} g(\mathbf{E}, \mathbf{u}) = \frac{qg(\mathbf{E}, \mathbf{U})}{c\sqrt{1-\beta^2}} \\ \mathbf{f} &= \frac{q}{c} u^0 \mathbf{E} + q\kappa(B) \oslash \mathbf{u} = \frac{q}{\sqrt{1-\beta^2}} \{\mathbf{E} + \kappa(B) \oslash \mathbf{U}\} \end{aligned}\right\} \tag{4.208}$$

が得られる．ここに $\mathbf{E} \overset{\text{def}}{=} \kappa(E)$ である．(1.109) によって明らかなように，点電荷のエネルギー運動量 $\vec{P} = m\vec{u}$ と $\vec{f}$ とは直交する：

$$g(\vec{P}, \vec{f}) = 0 \tag{4.209}$$

したがって，**この力 $\vec{f}$ を受けて運動する点電荷の質量 m は時間的に一定で**

---

62) 以下 (4.210) まで，$\vec{f}(P), F(P), \mathbf{E}(P), B(P), \vec{u}(\tau)$ 等での記号 $(P), (\tau)$ 等を省く．

ある[63)]．また，(4.204)，(4.205) と (4.208) から，点電荷について

$$\frac{dW}{dt} = qg(\mathbf{E}, \mathbf{U}), \qquad \frac{d\mathbf{P}}{dt} = q\{\mathbf{E} + \kappa(B) \oslash \mathbf{U}\} \tag{4.210}$$

が得られる．この第 2 式の右辺は，記号が若干変更されている点を除けば，(4.28) の Lorentz 力そのものである．この運動方程式は，$\beta = |\mathbf{U}|/c \ll 1$ である場合には，Newton 力学におけるものと近似的に一致する．したがって，(4.207) で定義される $\vec{f}(P)$ は世界点 P にある電気量 q をもつ点電荷に作用する電磁力と考えられる．**電磁力の表示 (4.207) が 4 元速度と電磁場の値との演算積による簡明な形になっている**ことは注目に値する．なお，命題 1.3.17 によれば，**電磁場 F を「q, P および $\vec{u}(\tau)$ をそれぞれ任意の電気量，時空の任意の点および P における質点の固有時刻 τ における任意の 4 元速度とする．このとき，$\vec{u}(\tau)$ に線型に依存して (4.209) を満足する 4 元力 $\vec{f}(P)$ を $\vec{f}(P) = q\kappa(F(P)) \oslash \vec{u}(\tau)$ と表示する」という条件により一意的に定まる 2− 形式として捉える**こともできる．

次に Newton 力学における作用反作用の法則（Newton の第 3 法則）に相当することは特殊相対論ではどうなるかを考えよう．Newton 力学における作用反作用の法則は共通の時刻 t における質点 a から質点 b に作用する力 $\mathbf{F}_{ab}(t)$ と質点 b から質点 a に作用する力 $\mathbf{F}_{ba}(t)$ についてのものであり，この法則から関与する質点系の運動量の総和の保存則が帰結するのであった．特殊相対論では「作用の伝播する速さは有限である」ことが前提とされている[64)] から，空間的に離れた 2 点に存在する質点の間に作用する力について，**関与する質点のみを考えて作用反作用の関係を問題にすることは無意味である**．また，この理論にあっては，4 元力 $\vec{F}$ は座標枠のとり方に無関係であるが空間成分 $\mathbf{F}$ は座標枠に依存するので，作用反作用の法則を論ずる際にもそのことを考慮に入れなければならない．

幾つかの質点同士の相互作用で，それらの質点のみを考慮して作用反作用の法則を議論してよいのは，衝突の場合のように空間的に接触している質点間の相互作用に限られる．2 個の質点 a, b が衝突する場合，衝突の瞬

[63)] Newton 力学の枠組みの中で考えている限り，(4.28) で与えられる Lorentz 力を受けて運動する点電荷の質量が時間的に一定であることを理論的に導くことはできない．

[64)] 175 頁を参照．

間に，a が b から受ける力 $\mathbf{K}_{ab}$，b が a から受ける力 $\mathbf{K}_{ba}$ の間には，

$$\mathbf{K}_{ab} = -\mathbf{K}_{ba} \tag{4.211}$$

の関係があるとしてみよう．ただし，これらの力は共に慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ における Newton 型の力を表すものとする．質点 a, b のエネルギー運動量をそれぞれ $\overrightarrow{P_a}, \overrightarrow{P_b}$ と書いて

$$\overrightarrow{P_i} = {P_i}^0 \vec{E}_0 + \mathbf{P}_i, \quad g(\vec{E}_0, \mathbf{P}_i) = 0 \quad (i = a, b) \tag{4.212}$$

と表すと，

$$\frac{d\mathbf{P}_a}{dt} = \mathbf{K}_{ab} + \mathbf{K}_a, \qquad \frac{d\mathbf{P}_b}{dt} = \mathbf{K}_{ba} + \mathbf{K}_b \tag{4.213}$$

である．$\mathbf{K}_a, \mathbf{K}_b$ は，それぞれ a にはたらく力で $\mathbf{K}_{ab}$ 以外のもの，b にはたらく力で $\mathbf{K}_{ba}$ 以外のもので，共に外力を表す．(4.211)，(4.213) から，

$$\frac{d(\mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b)}{dt} = \mathbf{K}_a + \mathbf{K}_b \tag{4.214}$$

となる．したがって，外力の和 $\mathbf{K}_a + \mathbf{K}_b$ が $\mathbf{0}$ であれば運動量の和 $\mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b$ は保存する．ところで，特殊相対論にあってはエネルギーと運動量が組になったものが4次元運動量を構成するのであるから，**慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ のとり方に依存せずに運動量の保存が成り立つためにはエネルギーの保存も成り立たなければならない**．そこで，エネルギーの保存について考えよう．

a, b の質量が共に時間的に変化しないようなケースでは，a, b のエネルギー $W_a = c{P_a}^0, W_b = c{P_b}^0$ は

$$\frac{dW_a}{dt} = g(\mathbf{U}_a, \mathbf{K}_{ab} + \mathbf{K}_a), \qquad \frac{dW_b}{dt} = g(\mathbf{U}_b, \mathbf{K}_{ba} + \mathbf{K}_b) \tag{4.215}$$

を満足する．(4.213), (4.214) から，

$$\frac{d(W_a + W_b)}{dt} = g(\mathbf{U}_a - \mathbf{U}_b, \mathbf{K}_{ab}) + g(\mathbf{U}_a, \mathbf{K}_a) + g(\mathbf{U}_b, \mathbf{K}_b) \tag{4.216}$$

が得られる．この式の両辺を，t について t_1 から t_2 まで積分すると，

$$\begin{aligned}&(W_a + W_b)|_{t=t_2} - (W_a + W_b)|_{t=t_1} \\ &= \int_{\mathbf{X}_{ab}(t_1)}^{\mathbf{X}_{ab}(t_2)} g(\mathbf{K}_{ab}, d\mathbf{X}_{ab}) + \int_{\mathbf{X}_a(t_1)}^{\mathbf{X}_a(t_2)} g(\mathbf{K}_a, d\mathbf{X}_a) + \int_{\mathbf{X}_b(t_1)}^{\mathbf{X}_b(t_2)} g(\mathbf{K}_b, d\mathbf{X}_b)\end{aligned} \tag{4.217}$$

となる．ここに a, b の位置 $Q_a(t), Q_b(t)$ を

$$\left.\begin{aligned} Q_a(t) &= O + ct\vec{E}_0 + \mathbf{X}_a(t), \quad g(\vec{E}_0, \mathbf{X}_a(t)) = 0 \\ Q_b(t) &= O + ct\vec{E}_0 + \mathbf{X}_b(t), \quad g(\vec{E}_0, \mathbf{X}_b(t)) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.218}$$

と表して，$\mathbf{X}_{ab}(t) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{X}_a(t) - \mathbf{X}_b(t)$ とした．したがって，$\mathbf{K}_{ab}$ と外力 $\mathbf{K}_a, \mathbf{K}_b$ のなした仕事の和が 0 である場合（例えば，外力が作用せず，$\mathbf{K}_{ab}$ は a, b が衝突した瞬間のみ $\mathbf{0}$ でなくて，しかもその大きさが有限である場合）には，エネルギーの和 $W_a + W_b$ は保存する．

以上の議論は次のようにまとめられる：質点 a, b が衝突してその瞬間だけ相互に力をおよぼし合い，かつこれらの質量が時間的に変化しないとき，ある慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ において，$\mathbf{K}_{ab} = -\mathbf{K}_{ba}$ でありかつ $\mathbf{K}_{ab}$ と外力 $\mathbf{K}_a, \mathbf{K}_b$ のなした仕事の和が 0 である場合は，質点 a, b のエネルギーの和 $W_a + W_b$ と，運動量の和 $\mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b$ は共に保存（すなわち，エネルギー運動量が保存）する．ところで，エネルギー運動量は 4 次元ベクトルであるから，この保存則は座標系によらずに成り立つことになる．

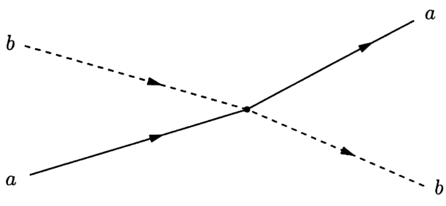


図 **4.6**　2 粒子の衝突

次に，時空内の任意の定点 A をとり，質点 a, b から成る系の A の周りの **4 次元角運動量** $L \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=a}^{b} (\overrightarrow{OQ_i} - \overrightarrow{OA}) \curlywedge \vec{P}_i$ を考えると[65]，エネルギー運動量の定義を用いることにより，

$$\begin{aligned} \frac{DL}{Dt} &\overset{\text{def}}{=} \sum_{i=a}^{b} \left\{ \frac{D(\overrightarrow{OQ_i} - \overrightarrow{OA})}{Dt} \curlywedge \vec{P}_i + (\overrightarrow{OQ_i} - \overrightarrow{OA}) \curlywedge \frac{D\vec{P}_i}{Dt} \right\} \\ &= \sum_{i=a}^{b} (\overrightarrow{OQ_i} - \overrightarrow{OA}) \curlywedge \frac{D\vec{P}_i}{Dt} \end{aligned} \tag{4.219}$$

65)　Z_i をある量とするとき，$\sum_{i=a}^{b} Z_i \overset{\text{def}}{=} Z_a + Z_b$ とする．

を導くことができる.

$$A = O + A^0\vec{E}_0 + \mathbf{A}, \qquad g(\vec{E}_0, \mathbf{A}) = 0 \tag{4.220}$$

と表して (4.211)〜(4.213), (4.215), (4.218), (4.220) を用いると, (4.219) は

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{1}{c}g(\mathbf{U}_a - \mathbf{U}_b, \mathbf{K}_{ab})(\mathbf{X}_a(t) - \mathbf{A}) \curlywedge \vec{E}_0 \\ &\quad + \frac{1}{c}g(\mathbf{U}_b, \mathbf{K}_{ba})(\mathbf{X}_b(t) - \mathbf{X}_a(t)) \curlywedge \vec{E}_0 + (ct - A^0)\vec{E}_0 \curlywedge (\mathbf{K}_a + \mathbf{K}_b) \\ &\quad + \sum_{i=a}^{b} (\mathbf{X}_i(t) - \mathbf{A}) \curlywedge \left\{\frac{1}{c}g(\mathbf{U}_i, \mathbf{K}_i)\vec{E}_0 + \mathbf{K}_i\right\}\end{aligned} \tag{4.221}$$

と書き換えられる. この両辺を t について t_1 から t_2 まで積分すると,「外力が作用せず, $\mathbf{K}_{ab}$ ($= -\mathbf{K}_{ba}$) が a, b が衝突した瞬間のみ $\mathbf{0}$ でなく, かつその大きさが有限である」場合は, 右辺は積分に寄与せず

$$L(t_2) - L(t_1) = 0 \tag{4.222}$$

が得られ, 4 次元角運動量 $L(t)$ が保存することがわかる.

3 個以上の質点が相互作用している系のエネルギー運動量, 4 次元角運動量についても上記と同様のことが成り立つことは明らかであろう.

かくて, 限定された状況下ではあるが, 質点系についての作用反作用の法則が特殊相対論においても意味をもっていることがわかった.

なお, 1 個の質点についてそれに作用する 4 元力と, **エネルギー運動量の保存則**, **4 次元角運動量の保存則**の間には簡明な関係がある. (4.200) から, 質点にはたらく 4 元力 $\vec{F}$ が 0 であることと, エネルギー運動量 $\vec{P}$ が保存することとは同等である. また, 2 定点 A, O をとり, 質点の O を原点とする位置ベクトルを $\vec{X}$ と表して, A の周りの 4 次元角運動量 $L \overset{\text{def}}{=} (\vec{X} - \overrightarrow{OA}) \curlywedge \vec{P}$, $\vec{F}$ の A の周りの **4 次元モーメント** $N \overset{\text{def}}{=} (\vec{X} - \overrightarrow{OA}) \curlywedge \vec{F}$ を考えると, L, N は共に 2 階交代反変テンソルである. (4.200) から,

$$\begin{aligned}\frac{DL}{D\tau} &\overset{\text{def}}{=} \frac{D(\vec{X} - \overrightarrow{OA})}{D\tau} \curlywedge \vec{P} + (\vec{X} - \overrightarrow{OA}) \curlywedge \frac{D\vec{P}}{D\tau} \\ &= (\vec{X} - \overrightarrow{OA}) \curlywedge \frac{D\vec{P}}{D\tau} = N\end{aligned} \tag{4.223}$$

が導かれる．したがって，モーメント N が 0 であることと，4 次元角運動量 L が保存することとは同等である．例えば，$\vec{F} \mathbin{/\!/} (\vec{X} - \overrightarrow{OA})$ であれば，$N=0$，すなわち L は保存する．また，エネルギー運動量 $\vec{P}$ が保存するならば，任意の点 A の周りの 4 次元角運動量は保存する[66]．慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ をとって，$\vec{X} = X^0\vec{E}_0 + \mathbf{X}$, $g(\vec{E}_0,\mathbf{X}) = 0$, $\overrightarrow{OA} = A^0\vec{E}_0 + \mathbf{A}$, $g(\vec{E}_0,\mathbf{A}) = 0$, $\vec{P} = P^0\vec{E}_0 + \mathbf{P}$, $g(\vec{E}_0,\mathbf{P}) = 0$, $\vec{F} = F^0\vec{E}_0 + \mathbf{F}$, $g(\vec{E}_0,\mathbf{F}) = 0$ と表すと，$\vec{F} \mathbin{/\!/} (\vec{X} - \overrightarrow{OA})$ であれば $\mathbf{F} \mathbin{/\!/} (\mathbf{X} - \mathbf{A})$ であり，L が保存するならば 3 次元的角運動量 $L^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{X} - \mathbf{A}) \curlywedge \mathbf{P}$ も保存することがわかる．

なお，エネルギー運動量 $\vec{P}$ が固有時で計って保存することと，任意のある慣性系における時間で計って保存することとは同等である．4 次元角運動量 L についても同様である．

ここで質量 0 の粒子についてコメントしておく．$m=0$ の場合も (4.196), (4.197) およびそれらから導かれる $W = c\sqrt{g(\mathbf{P},\mathbf{P}) + m^2c^2}$ は成り立つものとすると，$W = c|\mathbf{P}| = c\sqrt{g(\mathbf{P},\mathbf{P})}$ であるが，(4.196),(4.197) からわかるように，$W, |\mathbf{P}|$ が 0 でないのは，$|\mathbf{U}(t)| = c$ の場合に限られる． 逆に，$|\mathbf{U}(t)| = c$ であって，$W, \mathbf{P}$ が有限であり得るのは $m=0$ である場合に限られる．光を粒子と見なした場合，その質量は 0 ということになる．$m=0$ の粒子の 3 次元的速さは常に c であって，加速も減速もされ得ない．ところで，光の量子論によれば，振動数 ν の光のエネルギーと運動量の大きさは，h を Planck 定数として，それぞれ $W \stackrel{\text{def}}{=} h\nu, |\mathbf{P}| \stackrel{\text{def}}{=} h\nu/c$ で与えられる．このことは，量子力学の入門書にあるように，相対論を考慮に入れない考察に基づいても導くことができる．それにも拘わらず $W = c|\mathbf{P}|$ を満足していて，特殊相対論における結論と整合していることは注目に値する．

4.4 本章のまとめと補足

4.1 節において，Newton 力学と電磁気学とを「3 次元の物理」として整理した．その結果，力学および電磁気学における基礎量は「時刻に依存する 3 次元テンソル量」となり，質点の運動方程式，電磁場の基礎方程式お

66) 2 個以上の質点から成る系について，系全体のエネルギー運動量の保存則は系全体の 4 次元角運動量の保存則を意味しない．

よび電磁場中での荷電物質が受ける力（Lorentz 力）は，それぞれ (4.12), (4.36) および (4.28)（あるいは (4.84)）で与えられることとなった．これらは「相当程度の簡明さ」を備えているものの，以下の点で不満足である：⟨1⟩ Lorentz 力は Galilei 変換のもとで不変でなく，質点の運動方程式 (4.12) との整合性が欠如している．⟨2⟩ (4.12) にも電磁場の方程式 (4.36) にも，時刻に関する微分という，時間 $\mathcal{T}$ の局所座標系のとり方に依存する演算が現れており，また Lorentz 力の磁束密度に関わる部分は速度と場の値の演算積で表されるのに対し，電場に関わる部分はそれとは異質の表示になっている．

そこで **4.2** 節において，電磁気学の理論構造の中から 4 次元 Minkowski 空間としての時空を読みとり， さらに **4.3** 節において **「物理量はすべて Minkowski 時空におけるテンソル量であって，物理法則はこれらの量に関する方程式である」ということを基本的前提として力学と電磁気学の 4 次元形式を与えた．**

1 次元の時間 $\mathcal{T}$ と 3 次元の物理的空間 $\mathcal{S}$ は統一されて 4 次元 Minkowski 空間 $\mathcal{M}_4$ を構成することとなり，時計が示す時間経過はその時計の運動状態に依存すること，同時刻の相対性など相対論特有の事柄が帰結した[67]．また，電気量密度 $\rho^{(e)}$，電流密度 j は統合されて 3− 形式 J を，電場 E，磁束密度 B は 2− 形式 F を，磁場 H，電束密度 D は 2− 形式 $\tilde{F}$ を，スカラーポテンシャル φ，ベクトルポテンシャル $A^{(3)}$ は 1− 形式 A を，それぞれ構成することとなった．3 次元形式では 4 つもある Maxwell の方程式 (4.36) は 2 つの式 (4.154) にまとまり，また Lorentz 力も 4 元速度 $\vec{u}(\tau)$ と電磁場の値 $\kappa(F(P))$ との演算積による表示で与えられることになった．また，真空中の D, E, B, H は (4.41) における 2 つの関係で結ばれているが，この内容は F と $\tilde{F}$ との 1 つの関係 (4.164) で表されている．

$F, \tilde{F}, J$ およびそれらの間の関係式である電磁場の方程式 (4.154)，波動方程式 (4.167)，(4.170)，Lorenz 条件 (4.169) および Lorentz 力の表示 (4.207) は，すべて $\mathcal{M}_4$ における局所座標系に依存しない．電磁場のエネルギー運動量密度は反変ベクトル場値 3− 形式であり，空間的超曲面の有界領域における電磁場のエネルギーと運動量とは 4 次元ベクトルを構成しており，さ

67) 次章でみるように，Doppler 効果，一様加速度運動，剛体運動をする物体等に関しても相対論特有のことが現れる．

らには理論の整合性から質点のエネルギーと運動量も 4 次元ベクトルを構成すべきこととなった．その結果，エネルギーの絶対的基準が定まり，静止エネルギーの存在が導かれ，また質点の運動方程式は時空の局所座標系のとり方に依存しない表示 (4.200) に置き換わった．また，この運動方程式と Lorentz 力の表示 (4.207) からは，点電荷の質量が時間的に一定であるという結論が得られたのであった．「3 次元物理での Lorentz 力の表示 (4.28) は質量の時間的一定性を含意していた」といえよう．

また，3 次元理論において通例用いられている 2 つのベクトルのベクトル積は極めて限定的な概念であることに鑑み，本書では外積 $\wedge$ を用いて，力のモーメント，角運動量，角運動量密度を定義した．その結果，3 次元理論，4 次元理論を通じて，力のモーメントと角運動量は共に 2 階交代反変テンソルであり，角運動量密度は 2 階交代反変テンソル場値 3– 形式ということとなった．

特殊相対論は，電磁気的諸量を 1 次元の時間と 3 次元空間とを合わせた 4 次元空間である Minkowski 時空上のテンソル場として捉えることにより，電場と磁場の統一理論を構成した．これは一種の高次元統一理論といえる．Lorentz 力の表示 (4.28) も Maxwell の方程式 (4.36) も 4 次元的に統一されるのを待っていたかのようにみえる．**Maxwell の（古典）電磁気学は特殊相対論に至って理論的完成をみた**のである．時空は物理現象が生起する舞台であるから，時空概念の変革は物理学全体の変革を伴うことになった．

ここで加速度系（= 時空に対して加速度運動をしている系）による記述について述べておこう．正の時間的曲線 Γ を世界線とする運動をする一定質量 m の観測者 A を考える．パラメーターとして Γ に沿う固有時 τ をとり Γ 上の点を $\Gamma(\tau)$ と表して 4 元速度 $\vec{u}(\tau) \overset{\text{def}}{=} D\Gamma(\tau)/D\tau$ を考えるとき，$D\vec{u}(\tau)/D\tau \neq 0$ である場合には A 自身が加速度系であり，**A が自分を基準にして自己の運動を記述すると自分には慣性力（$=A$ が加速度運動していることにともなう見かけの力）$-mD\vec{u}(\tau)/D\tau$ が作用していることとなる．**これまでの議論から明らかなように，A の世界点 $\Gamma(\tau)$ を原点とする座標枠 $[\Gamma(\tau);(\vec{e}_0(\tau),\vec{e}_1(\tau),\vec{e}_2(\tau),\vec{e}_3(\tau))]$ を基準にとって物体の運動を記述することも可能である．これは観測者 A が自己に相対的な運動として運動を記述する際の座標枠である．この座標枠と慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ を構成する正規直交座

標枠 $[O;(\vec{E}_0,\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3)]$ との関係を用いて，任意の運動をする質点 P に作用する慣性力の Newton 力学の場合における (4.15) に対応する表示を導くことができる[68)].

おわりに，**「電場 E，磁束密度 B，磁場 H，電束密度 D，電気量密度 $\rho^{(e)}$，電流密度 j という概念は慣性系に固有のものであり，一般には電磁場 $F, \tilde{F}$，4 次元電流密度 J があると考えるべき」**ことを強調しておく．任意に選んだ局所座標系 (x^0,x^1,x^2,x^3) において，3 次元的量

$$\left.\begin{aligned} \check{E} &\overset{\text{def}}{=} -cF_{0\alpha}dx^\alpha \\ \check{B} &\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2!}F_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta \qquad (\alpha,\beta=1,2,3) \end{aligned}\right\} \tag{4.224}$$

を考え，これらをそれぞれ電場，磁束密度とよんでみても一般には意味をなさない．磁場，電束密度，電気量密度，電流密度についても同様である．

68) この慣性力は固有時 τ と P の世界線に沿う固有時の双方に依存する．

第5章　いくつかの問題

前章においては特殊相対論の基本的枠組みを与えた．この章では，個別的ではあるが重要であり，かつ入門書の多くでは詳しくは扱われていない，光源も観測者も任意の運動をしている場合の Doppler 効果，一様加速度運動，剛体運動をする棒の長さと見かけの長さ，電磁場，電気量，電流密度の特性等，いくつかの事項について述べよう．

5.1　光の Doppler 効果

光源と観測者が，いずれも（等速度運動とは限らない）任意の運動をしている場合の **Doppler 効果**について考察する．光源の運動を表す世界線を Γ とし，観測者の運動を表す世界線を Γ' とする．時空の原点 O を定める．Γ の上に基準の点を定め，それを起点として光源の固有時 τ を計り，τ をパラメーターとして Γ 上の点 P を $P = O + \vec{x}(\tau)$ と表す．同様に，観測者の固有時を表すパラメーター τ' を用いて，Γ' 上の点 Q を $Q = O + \vec{y}(\tau')$ と表す．

世界点 P から発せられた光を観測者が世界点 Q で受光したものとすると[1]，$\overrightarrow{PQ} = \vec{y}(\tau') - \vec{x}(\tau)$ は光的ベクトルであるから

$$g(\vec{y}(\tau') - \vec{x}(\tau)\,, \vec{y}(\tau') - \vec{x}(\tau)) = 0 \tag{5.1}$$

が成り立つ．Γ 上の点 $O + \vec{x}(\tau + d\tau)$ から発せられた光が Γ' 上の点 $O + \vec{y}(\tau' + d\tau')$ に到達するものとすると，(5.1) により $d\tau$ が無限小であれば $d\tau'$

1）　光線を図示する際には，正の向きに矢印を付けた波線で表すことにする．

も無限小であり

$$g\left(\vec{y}(\tau') - \vec{x}(\tau)\,,\,\frac{D\vec{y}(\tau')}{D\tau'}\right)d\tau' - g\left(\vec{y}(\tau') - \vec{x}(\tau)\,,\,\frac{D\vec{x}(\tau)}{D\tau}\right)d\tau = 0 \tag{5.2}$$

であることがわかる.

したがって，P から発せられた振動数 ν の光が Q において振動数 ν' として観測されるものとすると, 座標系によらない関係式

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{d\tau}{d\tau'} = \frac{g(\vec{y}(\tau') - \vec{x}(\tau), D\vec{y}(\tau')/D\tau')}{g(\vec{y}(\tau') - \vec{x}(\tau), D\vec{x}(\tau)/D\tau)} \tag{5.3}$$

が成り立つ.

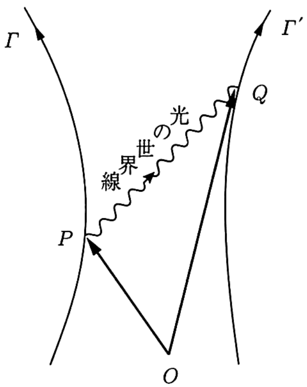


図 5.1　光源と観測者

これは, **光の Doppler 効果は発光時の光源の世界点 P と受光時の観測者の世界点 Q を結ぶベクトル $\overrightarrow{PQ} = \vec{y}(\tau') - \vec{x}(\tau)$ とそれらの点における光源の 4 元速度 $D\vec{x}(\tau)/D\tau$, 観測者の 4 元速度 $D\vec{y}(\tau')/D\tau'$ で定まり，光源と観測者の加速度には依存しない**ことを示している．なお，$\nu'/\nu = d\tau/d\tau'$ からわかるように，**光の Doppler 効果を観測することは発光時の光源の時間経過の速さと受光時の観測者の時間経過の速さの比を測定していることと同等**である．したがって，観測者は Doppler 効果による光の振動数の変化と受光時の自己の時計が時を刻むテンポを測定すれば，発光時の（すなわち測定時に自身の目に見えている）光源の時計が時を刻むテンポを知

ることができる．$\nu' < \nu$ （$\nu' > \nu$）の場合は振動数が小さい（大きい）方に偏移，すなわち**赤方偏移**（**青方偏移**）して観測され，また光源にある時計は観測者自身の時計よりもゆっくり（速く）時を刻むように**見える**ことになる[2)]．

慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ を任意にとり，$\vec{y} = Y^0\vec{E}_0 + \mathbf{Y}$, $g(\vec{E}_0, \mathbf{Y}) = 0$, $\vec{x} = X^0\vec{E}_0 + \mathbf{X}$, $g(\vec{E}_0, \mathbf{X}) = 0$ と分解して，さらに

$$\left.\begin{aligned} g\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}, \frac{d\mathbf{X}}{dt}\right) &= |\mathbf{Y} - \mathbf{X}| U \cos\theta \\ g\left(\mathbf{Y} - \mathbf{X}, \frac{d\mathbf{Y}}{dt'}\right) &= |\mathbf{Y} - \mathbf{X}| V \cos\varphi \end{aligned}\right\} \tag{5.4}$$

と表す．$t \overset{\text{def}}{=} X^0/c, t' \overset{\text{def}}{=} Y^0/c$ は，それぞれ固有時刻 τ, τ' に対応する $[O; \vec{E}_0]$ における時刻である．また，$U \overset{\text{def}}{=} |d\mathbf{X}/dt|, V \overset{\text{def}}{=} |d\mathbf{Y}/dt'|$ とおいた．

$Y^0 = ct' > X^0 = ct$ であることと (5.1) により，$Y^0 - X^0 = |\mathbf{Y} - \mathbf{X}|$ が得られる．これと $d\tau = \sqrt{1 - (U/c)^2}dt$, $d\tau' = \sqrt{1 - (V/c)^2}dt'$ および (5.4) の第 1 式により

$$g\left(\vec{y}(\tau') - \vec{x}(\tau), \frac{D\vec{x}(\tau)}{D\tau}\right) = \frac{|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{U}{c}\right)^2}}(-c + U\cos\theta) \tag{5.5}$$

が得られ，同様に

$$g\left(\vec{y}(\tau') - \vec{x}(\tau), \frac{D\vec{y}(\tau')}{D\tau'}\right) = \frac{|\mathbf{Y} - \mathbf{X}|}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{V}{c}\right)^2}}(-c + V\cos\varphi) \tag{5.6}$$

となる．これらを (5.3) に代入すると

$$\frac{\nu'}{\nu} = \sqrt{\frac{c^2 - U^2}{c^2 - V^2}}\frac{c - V\cos\varphi}{c - U\cos\theta} \tag{5.7}$$

---

2) これは，命題 4.2.2 で扱っている「同じ空間的位置から同時に出発して互いに異なる運動をした後に再会する 2 つの時計の刻む時間経過の比較の問題」とは別の事柄である．

を得る．とくに，ある直線（$\vec{e}_1$ 軸）上を運動している光源から発光された光を $\vec{e}_1$ 軸上を発光時の光源に追いかけられる状態で運動している観測者が受光する場合については，$\mathbf{Y}-\mathbf{X}$ の $\vec{e}_1$ 成分が正であるように $\vec{e}_1$ 軸の向きを定めるものとすると $\theta=\varphi=0$ であり

$$\frac{\nu'}{\nu}=\sqrt{\frac{(c+U)(c-V)}{(c-U)(c+V)}} \tag{5.8}$$

となる．なお，$U<V, U=V, U>V$，それぞれの場合に対応して $\nu'<\nu, \nu'=\nu, \nu'>\nu$ である．$\nu'<\nu$（$\nu'>\nu$）の場合は，観測者から見て光源が遠ざかって行く（接近して来る）ように見えることになるが，このとき光源からの光は赤方偏移（青方偏移）して観測される．すなわち，観測者の目には「受光時の自己の持つ時計よりゆっくり（速く）時を刻む光源にある時計が見える」こととなる．(5.8) で記述される効果は**縦 Doppler 効果**とよばれる．

互いに直交する 2 直線（$\vec{e}_1$ 軸および $\vec{e}_2$ 軸とする）を考える．$\vec{e}_1$ 軸上を運動している光源が両軸の交点を通過している瞬間に光源から発光された光を観測者が $\vec{e}_2$ 軸上に静止している瞬間（$V=0$ の瞬間）に受光した場合には，$\cos\theta=0$ である．したがって，このとき (5.7) は

$$\frac{\nu'}{\nu}=\sqrt{1-\left(\frac{U}{c}\right)^2} \tag{5.9}$$

となり，発光時の光源と受光時の観測者とは相互に遠ざかりつつあるのではないにも拘わらず赤方偏移が起こることになる．これは発光時の光源の固有時の経過の速さが，静止している場合に比べて因子 $\sqrt{1-(U/c)^2}$ だけ遅くなることの現れであり，**横 Doppler 効果**とよばれている．また，光源が $\vec{e}_2$ 軸上に静止している瞬間（$U=0$ の瞬間）に発光された光を $\vec{e}_1$ 軸上を運動している観測者が両軸の交点を通過している瞬間に受光した場合には，$\cos\varphi=0$ である．したがって，このとき (5.7) は

$$\frac{\nu'}{\nu}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \tag{5.10}$$

となり，この場合は青方偏移が起こることになる．これも一種の横 Doppler 効果である．この Doppler 効果における観測者の速さ V が，先述の赤方偏移が起こる場合の横 Doppler 効果における光源の速さ U と等しい場合，これらの光源と観測者は互いに入れ替わった関係にあるが，Doppler 効果も対応して逆の関係になっている．

なお，入門書では，(5.7)〜(5.10) はいずれも光源と観測者の速度が共に時間的に一定であるという前提のもとに導かれていることが多い．しかし上の導出からわかるように，**これらは光源と観測者の双方あるいは片方が加速度運動をしている場合についても成り立つ**ことに注意しよう．

5.2　一様加速度運動

この節では一様加速度運動を扱う．これは厳密解が得られることもあり，特殊相対論の種々の特性をみる上で格好の例になっている．なお，本節と次節において，位置ベクトルを表すのに慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ と条件 $g(\vec{E}_0,\mathbf{E})=0$, $g(\mathbf{E},\mathbf{E})=1$ を満足する一定のベクトル $\mathbf{E}$ を用いることにする．

5.2.1　一様加速度運動をするロケット

質量 m で大きさの無視できるロケット R の運動を考える．ロケットの世界点も R と記すことにして，これを

$$R=O+\vec{x},\qquad \vec{x}=x^0\vec{E}_0+\mathbf{x},\qquad g(\vec{E}_0,\mathbf{x})=0 \tag{5.11}$$

と表す．このロケットの世界線上の適当に選んだ点 R_0 を基準点としてこの世界線に沿う固有時を計ることとして，これを τ と記し，$\vec{x}$ を τ の関数として扱う：

$$\vec{x}(\tau)=x^0(\tau)\vec{E}_0+\mathbf{x}(\tau) \tag{5.12}$$

$\vec{P}(\tau)\overset{\text{def}}{=}mD\vec{x}/D\tau$ として，運動方程式

$$\frac{D\vec{P}(\tau)}{D\tau}=\vec{F} \tag{5.13}$$

において，4元力 $\vec{F}$ が

$$\vec{F} = m\frac{k}{c}\frac{dx}{d\tau}\vec{E}_0 + mk\frac{dt}{d\tau}\mathbf{E} \tag{5.14}$$

と表される場合を考える．ただし，k は加速度の次元をもつ正の定数とし，また $x(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} g(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{E})$, $t \stackrel{\text{def}}{=} x^0/c$ とおいた．容易にわかるように，この $\vec{F}$ は (4.202) を満足する．したがって，質量 m は τ に依存しない．

$\vec{F}$ が (5.14) で与えられるから，運動方程式 (5.13) の内容は

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = \frac{k}{c^2}\frac{dx}{d\tau}, \qquad \frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = k\frac{dt}{d\tau}\mathbf{E} \tag{5.15}$$

と表され，また

$$g\left(\frac{D\vec{P}(\tau)}{D\tau}, \frac{D\vec{P}(\tau)}{D\tau}\right) = m^2 g\left(\frac{D^2\vec{x}}{D\tau^2}, \frac{D^2\vec{x}}{D\tau^2}\right) = g(\vec{F}, \vec{F}) = (mk)^2 \tag{5.16}$$

が導かれる．すなわち，4元力（=Minkowski 型の力）$\vec{F}$ と 4 元加速度 $d^2\vec{x}/d\tau^2$，それぞれの “4 次元的長さ” は一定である．

τ の代わりに t を時間変数にとり，$X(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(\tau)$, $\mathbf{X}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x}(\tau)$ とおいて (5.15) を書き換える．

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \left|\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right|^2} \tag{5.17}$$

であるから

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{dt}{d\tau}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\dfrac{d\mathbf{X}}{dt}}{\sqrt{1 - \left|\dfrac{1}{c}\dfrac{d\mathbf{X}}{dt}\right|^2}}\right\} \tag{5.18}$$

となるが，これを用いると (5.15) の第2式は

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\dfrac{d\mathbf{X}}{dt}}{\sqrt{1 - \left|\dfrac{1}{c}\dfrac{d\mathbf{X}}{dt}\right|^2}}\right\} = k\mathbf{E} \tag{5.19}$$

と書き換えられる．この方程式からわかるように，Newton 型の力 $\mathbf{K}$ は $\mathbf{K} = mk\mathbf{E}$ であり，これは時間的に一定である．このことと (5.16) に鑑み，この運動[3] を**一様加速度運動**とよぶことにする．

運動方程式 (5.19) を初期条件

$$t = 0 \text{ で}, \quad \mathbf{X} = 0, \quad \frac{d\mathbf{X}}{dt} = 0 \tag{5.20}$$

のもとで解くと，

$$\mathbf{X}(t) = X(t)\mathbf{E}, \quad X(t) = \frac{c}{k}\sqrt{c^2 + k^2t^2} - \frac{c^2}{k} \tag{5.21}$$

を得る．容易に確かめられるように，(5.21) は (5.15) の第 1 式をも満足する．これは 3 次元空間内の直線上の運動を表している．また，$dX(t)/dt = ckt(c^2 + k^2t^2)^{-1/2} < c$, $d^2X(t)/dt^2 = c^3k(c^2 + k^2t^2)^{-3/2} \leq k$ である．

ロケットは時刻 $t = 0$ に空間の座標原点にある地球を出発したものと考え，地球を記号 E で表す[4]．ただし，地球は慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ に対して静止していて，かつその大きさは無視できるものとし，地球からロケットに向けて光を射出し続けるものとする．$[O; \vec{E}_0]$ での時刻 T に地球を出た光の先端は時刻 t（$t \geq T$）には空間座標が $Y(t) = c(t - T)$ の位置にある．ロケットの位置座標 $X(t)$ との差は

$$X(t) - Y(t) = \frac{c^3}{k}\frac{1}{\sqrt{c^2 + k^2t^2} + kt} + c\left(T - \frac{c}{k}\right) \tag{5.22}$$

これは，$T \geq c/k$ のとき，かつそのときに限り，t のすべての正の値に対して正である．よって，T が $T_c \stackrel{\text{def}}{=} c/k$ 以上であると，いくら時間をかけても光はロケットに追いつけない．逆に，時刻 T にロケットから地球に向けて射出された光の先端は，時刻 t（$t \geq T$）には $\widehat{Y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} -c(t - T) + X(T)$ にある．したがって，この光は有限の時刻 $T + X(T)/c$ に地球に到達する．ロケット，地球から射出された光およびロケットから射出された光の世界線は図 5.2 のようになる．

---

[3] **3 次元的加速度 $d^2\mathbf{X}/dt^2$ は時間的に一定ではない．**

[4] この E を電場を表す記号 E，ベクトルを表す記号 $\vec{E}_0, \mathbf{E}$ などと混同しないように．

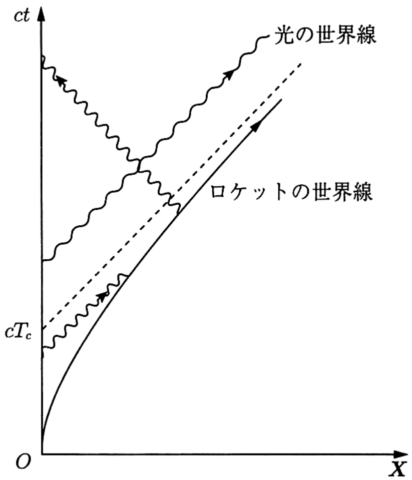


図 5.2　一様加速度運動をするロケット

ロケットの固有時 τ を $t=0$ から計り始めるものとして，t とロケットの位置 x を τ の関数として求めよう．(5.17) により

$$\tau = \int_0^t \sqrt{1 - \left(\frac{1}{c}\frac{dX}{dt}\right)^2}\, dt \tag{5.23}$$

であるが，この式の右辺に (5.21) を代入して積分を実行すると，

$$\tau = \frac{c}{k} \ln\left(\frac{kt + \sqrt{c^2 + k^2t^2}}{c}\right) \tag{5.24}$$

となる．これを t について解くと，

$$t = \frac{c}{k} \sinh\left(\frac{k\tau}{c}\right) \tag{5.25}$$

となり，この式と (5.21) から

$$X(t) = x(\tau) = \frac{c^2}{k}\left\{\cosh\left(\frac{k\tau}{c}\right) - 1\right\} \tag{5.26}$$

が得られる．さらに，上の 2 式から双曲線を表す式

$$\left(X + \frac{c^2}{k}\right)^2 - (ct)^2 = \frac{c^4}{k^2} \tag{5.27}$$

が導かれる．

ロケットの世界線は双曲線の一部であり，漸近線

$$\gamma = \{O + (x + cT_c)\vec{E}_0 + x\mathbf{E} | x \in R\} \tag{5.28}$$

をもつ．地球を出発して一様加速度運動を続けるロケットの任意の固有時刻 τ（$\tau \geq 0$）にロケットから射出された光を地球から見ることは原理的には可能であるが，時刻 T_c 以降の地球をロケットから見ることは原理的に不可能である．このことは図 5.2 からも明かであろう．**特殊相対論における一様加速度運動は Newton 力学における等加速度運動とは質的に異なる**のである．

$[O; (\vec{E}_0, \mathbf{E}, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)]$ を正規直交座標枠として超平面[5)] $H \stackrel{\text{def}}{=} \{O + (x + cT_c)\vec{E}_0 + x\mathbf{E} + y\mathbf{E}_2 + z\mathbf{E}_3 | x, y, z \in R\}$ を考えると，これはロケットと地球を隔てる "半透膜" であり，一般相対論に現れるブラックホール時空における事象の地平面と類似の性質をもっている．

このロケットが世界点 O から世界点

$$R(t) = O + ct\vec{E}_0 + X(t)\mathbf{E} \quad (t \geq 0) \tag{5.29}$$

に至るまでにロケットに搭載してある時計では時間 $\tau \stackrel{\text{def}}{=} (c/k)\ln\{(kt + \sqrt{c^2 + k^2t^2})/c\}$ だけ経過する．一方，O と $R(t)$ を結ぶ線分 $\{O + ct'\{\vec{E}_0 + \tanh(k\tau/2c)\mathbf{E}\} | 0 \leq t' \leq t\}$ を世界線とする運動をする時計，すなわち O から $R(t)$ まで慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ に対して等速度 $c\tanh(k\tau/2c)\mathbf{E}$ で運動する時計が刻む時間経過は $\tau_0 \stackrel{\text{def}}{=} (2c/k)\sinh(k\tau/2c)$ であり，容易に示されるように $\tau_0 > \tau$ である．これは命題 4.2.2 と整合している．

地球を出発後，ロケットは地球に向けて振動数 ν の光を射出し続けるものとして，地球に静止している観測者が慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ における時刻 t'（$t' \geq 0$）に観測する光の振動数を求めよう．この観測者と振動数をそれぞれ E および $N_E(t')$ と記す[6)]．$[O; \vec{E}_0]$ での時刻 t' における E の世界点は

$$E(t') = O + ct'\vec{E}_0 \tag{5.30}$$

5) 以下では，アフィン超平面のことを単に超平面とよぶ．

6) 世界線を同じくする観測者，物体，光源およびそれらの世界点を記号上区別しないことにする．

で与えられる．また，$x^0(\tau)=ct, x(\tau)=X(t)$ と (5.29) により，固有時刻 τ におけるロケット R の世界点は

$$R(\tau)=O+x^0(\tau)\vec{E}_0+x(\tau)\mathbf{E} \tag{5.31}$$

と表される．ロケットの固有時刻 τ にロケットから射出された光を観測者 E が時刻 t' に観測するものとすると

$$\overrightarrow{R(\tau)E(t')}=\{ct'-x^0(\tau)\}\vec{E}_0-x(\tau)\mathbf{E} \tag{5.32}$$

は正の光的ベクトルである．すなわち，

$$ct'-x^0(\tau)=x(\tau)>0 \tag{5.33}$$

が成り立つ．この条件式と (5.25)，(5.26) により，

$$t'=\frac{c}{k}\left\{\exp\left(\frac{k\tau}{c}\right)-1\right\} \tag{5.34}$$

であることがわかる．したがって

$$\frac{N_E(t')}{\nu}=\frac{d\tau}{dt'}=\exp\left(-\frac{k\tau}{c}\right) \tag{5.35}$$

となり，

$$N_E(t')=\frac{\nu}{1+\dfrac{k}{c}t'}=\exp\left(-\frac{k\tau}{c}\right)\nu \tag{5.36}$$

を得る．$t'>0$ に対しては $N_E(t')<\nu$ であり，これは「遠ざかりつつある物体から来る光は赤方偏移する」ことの一例であり，$\lim_{t'\to\infty}N_E(t')=0$ である．ロケットから射出された光を地球で観測していると，光は徐々に暗くなり，最終的（$t'\to\infty$ の極限）には真っ黒になってしまう．

次に地球からロケットに向けて振動数 ν の光を射出し続けるものとして，ロケットに乗っている観測者によってロケットの固有時刻 τ'（$\tau'\geq 0$）に観測される光の振動数を求めよう．この観測者，振動数をそれぞれ $R, N_R(\tau')$ と記す．慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ での時刻 t（$t<T_c$）に地球から射出された光をロケットの固有時刻 τ' に観測者 R が観測するものとすると，

$$\overrightarrow{E(t)R(\tau')}=(x^0(\tau')-ct)\vec{E}_0+x(\tau')\mathbf{E} \tag{5.37}$$

は，正の光的ベクトルである．すなわち

$$x^0(\tau') - ct = x(\tau') \tag{5.38}$$

である．この式と (5.25)，(5.26) により

$$t = \frac{c}{k}\left\{1 - \exp\left(-\frac{k\tau'}{c}\right)\right\} \tag{5.39}$$

が得られる．したがって

$$\frac{N_R(\tau')}{\nu} = \frac{dt}{d\tau'} = \exp\left(-\frac{k\tau'}{c}\right) \tag{5.40}$$

これより

$$N_R(\tau') = \exp\left(-\frac{k\tau'}{c}\right)\nu = \left(1 - \frac{kt}{c}\right)\nu \tag{5.41}$$

を得る[7]．したがって，$\lim_{\tau'\to\infty} N_R(\tau') = 0$ である．なお，(5.41) が意味をもつのは $t < T_c = c/k$ の場合に限られる．時刻 T_c 以後に地球から射出された光はロケットに到達し得ないのであるから，これは当然である．

ここで，$[O;\vec{E}_0]$ での時刻 t' に地球にいる観測者 E に見えるロケット上の時計の指している時刻およびロケットの固有時刻 τ' にロケットに乗っている観測者 R に見える地球に固定されている時計の指している時刻について考察しておく．(5.34) からわかるように，観測者 E は $[O;\vec{E}_0]$ での時刻 t' には時刻

$$\tau = \frac{c}{k}\ln\left(1 + \frac{kt'}{c}\right) \tag{5.42}$$

を指しているロケットの時計を見ることになる．明らかに，$t' > 0$ に対しては $t' - \tau > 0$ である．すなわち，観測者 E には自己の持っている時計の指している時刻 t' よりも前の時刻 τ（$\tau > 0$）を指しているロケットの時計が見える．また，ロケットに乗っている観測者 R は，自己の時計での時刻 τ' には，(5.39) で与えられる t（$0 < t < \tau'$）を指している地球にある時計

7）当然のことながら，(5.36)，(5.41)，および **5.3.2** 節での Doppler 効果についての結果は一般式 (5.3) を適用することによっても求められる．論理的にはその方がスッキリしているのであるが，「個別事例で具体的にステップを辿ることも理解を深める上で有効」と考え，敢えてこの道筋を選んだ．「一般式を適用することによる導出」は読者の演習問題としておく．

を見る．この t は $T_c = c/k$ よりも小さいが，τ' の増大（すなわちロケットでの時間の経過）につれて急速に T_c に近づく．地球にいる観測者 E とロケットに乗っている観測者 R は，**互いに「自己の時計よりも遅れている相手の時計を見る」ことになるが，これは矛盾ではなく，また Doppler 効果の式 (5.36)，(5.41) に照応している**ことに注意しよう．

次に，地球とロケットの間の距離について考える．相対論では「2質点間の距離」といっても単純ではない，素朴に2つの質点 A, B を眺めているときに目に映る A, B の空間的位置座標の値から Pythagoras の定理に基づいて求められた距離を指すのか，あるいは別の定義（例えば，次に述べる定義）に基づくのかで状況は全く異なるからである[8]．

定義 5.2.1. 世界点 P, Q が空間的な関係にあるとき，すなわち $\overrightarrow{PQ}$ が空間的ベクトルであるとき，$|\overrightarrow{PQ}| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})}$ で定義される $|\overrightarrow{PQ}|$ のことを P, Q 間の **4 次元的距離** という．

定義 5.2.2. 2つの質点 A, B の世界線をそれぞれ $\Gamma(A), \Gamma(B)$ と表す，世界点 Q を1つ固定して，Q に対応する慣性系 $[O(Q); \vec{E}_0(Q)]$ をとり[9]，x^0 を固定して超平面 $\{O + x^0\vec{E}_0(Q) + \mathbf{x} | \mathbf{x} \in V_{o4},\ g(\vec{E}_0(Q), \mathbf{x}) = 0\}$ と $\Gamma(A), \Gamma(B)$ の交点をそれぞれ P_A, P_B と表す．このとき P_A, P_B 間の4次元的距離 $D_{AB} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g(\overrightarrow{P_AP_B}, \overrightarrow{P_AP_B})}$ $(= D_{BA})$ のことを慣性系 $[O(Q); \vec{E}_0(Q)]$ の時刻 $t \overset{\text{def}}{=} x^0/c$ における**質点** A, B **間の距離**，あるいは $[O(Q); \vec{E}_0(Q)]$ を静止系とする人が時刻 $t \overset{\text{def}}{=} x^0/c$ に観測する**質点** A, B **間の距離**という．

特殊相対論においては，通例この定義を採用している．ある瞬間に観測者の目に入る光を考えると，「遠方の光源からの光は，近くの光源から来た光より以前に光源から射出されたものである」から，**この定義による** A, B **間の距離は，ある瞬間に観測者に見える（すなわち，目によって知覚される）** A, B **間の距離とは別ものである**ことは明白であろう．

---

8) 本書では，「観測する，観測される，測定」という言葉と「見る，見える」という言葉とを，この意味を込めて使い分けている．

9) 慣性系 $[O(Q); \vec{E}_0(Q)]$ というのはわかりにくいかもしれない．以下で現れる $[O; \vec{E}_0(R)]$ や $[O; \vec{E}_0(Ob)]$ は $[O(Q); \vec{E}_0(Q)]$ において原点が Q 依存性をもたないようなものの例である．また，$[O; \vec{E}_0]$ は $O(Q)$ と $\vec{E}_0(Q)$ が共に Q 依存性のない特殊なケースと見なされる．

この定義に基づいて，地球に留まっている観測者 E が慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ の時刻 t' に観測する E,R 間の距離（$D_E(t')$ と記す）を求めてみよう．(5.11)〜(5.29) で用いた慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ は観測者 E の静止系である．時刻 t' における観測者 E およびロケットの世界点はそれぞれ (5.30) および (5.29) で与えられるから

$$D_E(t') = X(t') = \frac{c}{k}\sqrt{c^2+(kt')^2} - \frac{c^2}{k} \tag{5.43}$$

である．明らかに，$D_E(0)=0$, $\lim_{t'\to\infty} D_E(t') = \infty$ である．

次に，ロケットに乗っている人 R がその固有時刻 τ' に観測する E,R 間の距離（$D_R(\tau')$ と記す）を求める．固有時刻 τ' を定めて

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_0(R) &\overset{\text{def}}{=} \cosh\left(\frac{k\tau'}{c}\right)\vec{E}_0 + \sinh\left(\frac{k\tau'}{c}\right)\mathbf{E} \\ \mathbf{E}(R) &\overset{\text{def}}{=} \sinh\left(\frac{k\tau'}{c}\right)\vec{E}_0 + \cosh\left(\frac{k\tau'}{c}\right)\mathbf{E} \end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

とおくと，$g(\vec{E}_0(R),\vec{E}_0(R)) = -1$, $g(\mathbf{E}(R),\mathbf{E}(R)) = 1$, $g(\vec{E}_0(R),\mathbf{E}(R)) = 0$ が満足される．$\vec{E}_0(R) = (1/c)DR(\tau')/D\tau'$ であって，これは観測者 R の世界線の点 $R(\tau')$ における接ベクトルであり，正の時間的単位ベクトルである．$[O;\vec{E}_0(R)]$ は観測者 R が世界点 $R(\tau')$ にいる瞬間の R の静止系（R 自身の 4 元速度の $[O;\vec{E}_0(R)]$ における空間成分がその瞬間 $\mathbf{0}$ である慣性系）である．

(5.31) において $\tau\to\tau'$ とした場合の $R(\tau')$ は $\vec{E}_0(R),\mathbf{E}(R)$ を用いて

$$R(\tau') = O + \frac{c^2}{k}\left[\sinh\left(\frac{k\tau'}{c}\right)\vec{E}_0(R) + \left\{1-\cosh\left(\frac{k\tau'}{c}\right)\right\}\mathbf{E}(R)\right] \tag{5.45}$$

と表すことができる．R の固有時刻 τ' は慣性系 $[O;\vec{E}_0(R)]$ における時刻 $(c/k)\sinh(k\tau'/c)$ である．そこで，E の世界線と超平面

$$\left\{O + \frac{c^2}{k}\sinh\left(\frac{k\tau'}{c}\right)\vec{E}_0(R) + \mathbf{y}\,\middle|\, g(\vec{E}_0(R),\mathbf{y}) = 0,\ \mathbf{y}\in V_4\right\} \tag{5.46}$$

との交点を $Q(\tau')$ と表すと，

$$Q(\tau') = O + \frac{c^2}{k}\left\{\sinh\left(\frac{k\tau'}{c}\right)\vec{E}_0(R) - \tanh\left(\frac{k\tau'}{c}\right)\mathbf{E}(R)\right\} \tag{5.47}$$

となる．ロケットの固有時刻 τ' に $[O;\vec{E}_0(R)]$ で観測される E, R 間の距離は $D_R(\tau') \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g(\overrightarrow{Q(\tau')R(\tau')}, \overrightarrow{Q(\tau')R(\tau')})}$ であるが，(5.45)，(5.47) より

$$D_R(\tau') = \frac{c^2}{k}\left\{1 - \operatorname{sech}\left(\frac{k\tau'}{c}\right)\right\} \tag{5.48}$$

であることがわかる．$D_R(0) = 0$ であり，$D_R(\tau')$ は τ' の狭義の単調増加関数であるが，

$$\lim_{\tau' \to \infty} D_R(\tau') = \frac{c^2}{k} = cT_c \tag{5.49}$$

である．**ロケットの固有時刻 τ' においてロケットで観測される E, R 間の距離は時刻 $\tau' = 0$ での値 0 から単調に増加するが，いくら時間が経っても有限に留まり，ロケットでの時間経過と共に c^2/k に近づく**ことになる．これは，観測者 E が観測した場合の E とロケットの距離 $D_E(t')$ が，t' の増大と共に無限大に発散するのと著しい対照をなす．

次に，地球からロケットを**見ている**場合，ロケットから地球を**見ている**場合の両者の間の見かけの距離について考えよう．前述のように，人間が目で見る場合，定義 5.2.2 の意味での距離がそのまま目に映るわけではない．任意の運動状態にある観測者 Ob が世界点 $P(Ob)$ において見る「2 質点間の見かけの距離」を次のように定義する：

定義 5.2.3. 観測者 Ob がその世界線 $\Gamma(Ob)$ 上のある点 $P(Ob)$ にいるとき，質点 A, B が，それぞれ世界点 P_a, P_b にある瞬間に射出された光を受光するものとする．$\Gamma(Ob)$ の点 $P(Ob)$ における接ベクトルであるような正の時間的単位ベクトルを $\vec{E}_0(Ob)$ と記して，ベクトル $\overrightarrow{P_aP_b}$ を $\overrightarrow{P_aP_b} = X^0\vec{E}_0(Ob) + \mathbf{X}$, $g(\vec{E}_0(Ob), \mathbf{X}) = 0$ と表し $\widehat{D}_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ とおいて，$\widehat{D}_{AB}$ $(= \widehat{D}_{BA})$ のことを観測者 Ob が世界点 $P(Ob)$ において見る**質点 A, B 間の見かけの距離** という[10]．

時空内の任意の固定点 O に対して，$[O;\vec{E}_0(Ob)]$ は観測者が世界点 $P(Ob)$ にいる瞬間の観測者の静止系である．

---

10) この定義も，実際に人間が両眼で見たときに知覚される距離を精確に表してはいない．より精密には，両眼の間隔や各眼の開口部の大きさ，眼の内部構造や視神経の機能等も考慮に入れなければならない．

地球に留まっている観測者 E が時刻 t' （$t' \geq 0$）に見るロケットまでの距離（$\widehat{D}_E(t')$ と記す）を求めよう．

ロケットの固有時刻 τ にロケットから射出された光を $[O;\vec{E}_0]$ における時刻 t' に観測者 E が見たものとする．光の射出時のロケットの世界点を $R(\tau)$，受光時の E の世界点を $E(t')$ と記すと，(5.21)，(5.32)，(5.33) を用いて示されるように

$$\overrightarrow{R(\tau)E(t')} = \frac{ck(t')^2}{2(c+kt')}(\vec{E}_0 - \mathbf{E}) \tag{5.50}$$

である．したがって

$$\widehat{D}_E(t') = \frac{ck(t')^2}{2(c+kt')} \tag{5.51}$$

となる．$\widehat{D}_E(0) = 0, \lim_{t'\to\infty} \widehat{D}_E(t') = \infty$ であり，$t' > 0$ では $\widehat{D}_E(t') < D_E(t')$ である．これは自然な結論といえよう．

次に，ロケットの固有時刻 τ' （$\tau' \geq 0$）にロケットから見える地球までの距離（$\widehat{D}_R(\tau')$ と記す）を求めよう．$[O;\vec{E}_0]$ での時刻 t に地球から射出された光がロケットの固有時刻 τ' にロケットに乗っている観測者 R の目に入る場合，射出時の地球の世界点を $E(t)$，受光時の R の世界点を $R(\tau')$ とすると，$\overrightarrow{E(t)R(\tau')}$ は正の光的ベクトルであり，(5.37)，(5.38) からわかるように

$$\overrightarrow{E(t)R(\tau')} = x(\tau')(\vec{E}_0 + \mathbf{E}) \tag{5.52}$$

である．これを $\vec{E}_0(R), \mathbf{E}(R)$ を用いて表すと

$$\overrightarrow{E(t)R(\tau')} = \frac{c^2}{2k}\left\{1 - \exp\left(-\frac{k\tau'}{c}\right)\right\}^2 \{\vec{E}_0(R) + \mathbf{E}(R)\} \tag{5.53}$$

となる．ここに (5.26) を用いた．したがって

$$\widehat{D}_R(\tau') = \frac{c^2}{2k}\left\{1 - \exp\left(-\frac{k\tau'}{c}\right)\right\}^2 \tag{5.54}$$

となる．$\widehat{D}_R(0) = 0$ であり，$\tau' > 0$ に対しては $D_R(\tau')/2 < \widehat{D}_R(\tau') < D_R(\tau')$ であって，かつ $\widehat{D}_R(\tau')$ は τ' の狭義の単調増加関数である．また，

$$\lim_{\tau'\to\infty} \widehat{D}_R(\tau') = \frac{c^2}{2k} = \lim_{\tau'\to\infty} \frac{1}{2} D_R(\tau') \tag{5.55}$$

である．**ロケットから見る地球までの見かけの距離はロケットでの時間経過と共に単調に増加するが，いくら時間が経ってもその大きさは有限に留まり，$\tau' \to \infty$ の極限で $c^2/2k$ に収束する**のである．

$N_E, D_E, \widehat{D}_E$ の表示 (5.36)，(5.43)，(5.51) とそれらの $t' \to \infty$ での極限，および $N_R, D_R, \widehat{D}_R$ の表示 (5.41)，(5.48)，(5.54) とそれらの $\tau' \to \infty$ での極限は一様加速度運動の特徴を明示している．

5.2.2 一様加速度系

a を正定数，τ を実数値をとるパラメーター，σ を $a+\sigma>0$ なる範囲を動くパラメーターとする．σ の各値に対して

$$P(\tau,\sigma) = O + \vec{y}(\tau,\sigma), \quad \vec{y}(\tau,\sigma) = y^0(\tau,\sigma)\vec{E}_0 + y(\tau,\sigma)\mathbf{E} \tag{5.56}$$

$$y(\tau,\sigma) = \sqrt{(y^0(\tau,\sigma))^2 + (a+\sigma)^2}, \quad \forall\tau \in R \tag{5.57}$$

で記述される時間的曲線 $\varGamma_\sigma$ を考えよう．ここに，R は実数全体の集合を表す．(5.27) と (5.57) を比べるとわかるように，$\varGamma_\sigma$ は，質量 m の質点が4元力

$$\vec{F} = \frac{mc}{a+\sigma}\left\{\frac{\partial y(\tau,\sigma)}{\partial\tau}\vec{E}_0 + \frac{\partial y^0(\tau,\sigma)}{\partial\tau}\mathbf{E}\right\}, \quad y(\tau,\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} g(\vec{y}(\tau,\sigma),\mathbf{E}) \tag{5.58}$$

の作用のもとで，初期条件

$$y^0 = 0 \text{ で，} \quad y = a+\sigma, \quad \frac{dy}{dy^0} = 0 \tag{5.59}$$

を満足する運動をしている場合の質点の世界線である．ただし，τ をこの曲線に沿う固有時としている．すなわち，前部分節で考えた運動で $k = c^2/(a+\sigma)$, $x = y-(a+\sigma)$ としたものが $\varGamma_\sigma$ で記述される運動である．

$M_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{O + y^0\vec{E}_0 + y\mathbf{E} | y^0, y \in R\}$ を考えると，これは Minkowski 時空の部分アフィン空間であって，2次元 Minkowski 時空（$= \vec{E}_0$ が正の時間的単位ベクトルであるように時間的に向き付けられた2次元 Minkowski 空間）と見なすことができる．O と時間的曲線 $\varGamma_\sigma$（$a+\sigma>0$）はこの部分

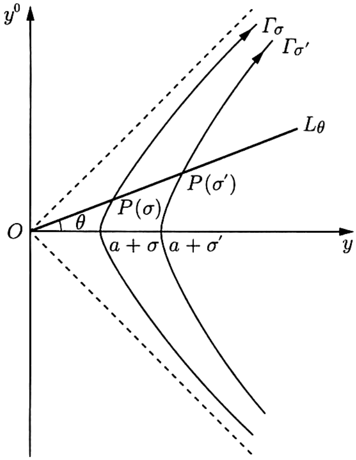


図 **5.3** Γ_σ, $\Gamma_{\sigma'}$, L_θ

アフィン空間内にある．時空 M_2 内の勾配 $\tan\theta$ が $-1<\tan\theta<1$ であるような O を通る直線 L_θ と世界線 $\Gamma_\sigma, \Gamma_{\sigma'}$ との交点をそれぞれ $P(\sigma), P(\sigma')$ とすると，これらは空間的な関係にあり，$P(\sigma), P(\sigma')$ 間の 4 次元的距離 $|\overrightarrow{P(\sigma)P(\sigma')}|$ は直線の傾きによらない値 $|\sigma-\sigma'|$ である．このことは (5.57) を用いて容易に示される．また

$$\beta \overset{\text{def}}{=} \frac{dy}{dy^0} = \frac{y^0}{y} = \tan\theta < 1 \tag{5.60}$$

である．したがって，1 つの直線 L_θ 上にある瞬間の各世界線上の質点の 3 次元的速度 $c\beta\mathbf{E}$ は共通の値 $(c\tan\theta)\mathbf{E}$ をもつ．以下では，パラメーター σ に対応する β と座標 (y^0, y) を，それぞれ $\beta(\sigma)$, $(y^0(\sigma), y(\sigma))$ と表すことにする．(5.25) で $k=c^2/(a+\sigma)$ とおくことにより世界線 Γ_σ に沿う固有時 τ_σ を y^0 軸との交点を基準点として計ることにすると次式が成立つ：

$$\frac{\beta(\sigma)}{\sqrt{1-\{\beta(\sigma)\}^2}} = \frac{y^0(\sigma)}{a+\sigma} = \sinh\left(\frac{c\tau_\sigma}{a+\sigma}\right) \tag{5.61}$$

世界点 $P(0)$ と $P(\sigma)$ とでは 3 次元的速さは同じであるから

$$\frac{y^0(0)}{a} = \frac{y^0(\sigma)}{a+\sigma} \tag{5.62}$$

であり，したがって

$$\frac{c\tau_0}{a} = \frac{c\tau_\sigma}{a+\sigma} \tag{5.63}$$

である．これと (5.61) より

$$\frac{y^0(\sigma)}{a+\sigma} = \sinh\left(\frac{c\tau_0}{a}\right) \tag{5.64}$$

を得る．

この部分節の残りの部分では，2 次元 Minkowski 時空 M_2 内に限定して考えることにする．図 5.4 で示してあるように，世界線 $\Gamma_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \Gamma_\sigma|_{\sigma=0}$ を時間軸とし，Γ_0 と y 軸との交点 O_R を原点，y 軸と重なって同じ方向を向く直線を Y 軸とする座標系 (Y^0, Y) を考える．

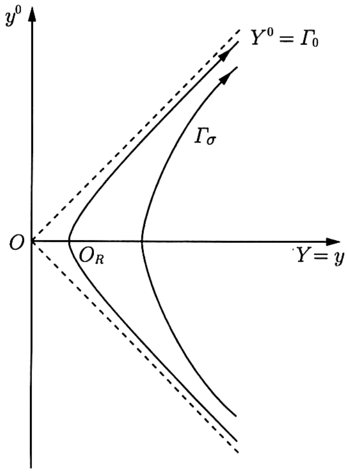


図 5.4 Y^0 軸，Y 軸

世界点 $P(\sigma)$ の座標は $(Y^0(\sigma), Y(\sigma)) = (c\tau_0, \sigma)$ である[11]．このことと (5.64) により

$$y^0(\sigma) = (Y(\sigma)+a)\sinh\left(\frac{Y^0(\sigma)}{a}\right) \tag{5.65}$$

となる．さらに，この式と

$$y(\sigma) = \sqrt{(y^0(\sigma))^2 + (a+\sigma)^2} \tag{5.66}$$

[11] τ_0 は世界線 Γ_σ $(\sigma \neq 0)$ に沿う固有時の $P(\sigma)$ での値 τ_σ とは異なることに注意．

から

$$y(\sigma) = (Y(\sigma)+a)\cosh\left(\frac{Y^0(\sigma)}{a}\right) \tag{5.67}$$

が導かれる．ここで σ は任意であるから，座標系 (y^0, y) と座標系 (Y^0, Y) との関係

$$y^0 = (Y+a)\sinh\left(\frac{Y^0}{a}\right), \quad y = (Y+a)\cosh\left(\frac{Y^0}{a}\right) \tag{5.68}$$

が得られる．座標系 (Y^0, Y) は $y > |y^0|$ なる領域を記述できる．2 次元 Minkowski 時空 M_2 の計量を g_2 と表すと

$$g_2 = -dy^0 \otimes dy^0 + dy \otimes dy = -\left(\frac{Y+a}{a}\right)^2 dY^0 \otimes dY^0 + dY \otimes dY \tag{5.69}$$

となる．**真空中の光の速さは，座標系 (Y^0, Y) では**

$$c\frac{dY}{dY^0} = \frac{c(Y+a)}{a} \tag{5.70}$$

であり，$Y \neq 0$ である限りこれは c ではない．**慣性系においては，「光源の運動状態に関係なく（加速度運動を含めてどのような運動をしていても）真空中の光の速さは c として観測される」といってよいが，**この例からわかるように，**非慣性系（加速度系）にあってはこの限りではない．「運動は相対的であるから，光源が加速度運動していることと観測者が加速度運動していることとは物理的に同じ」などと考えてはならない**[12]．

また，座標変換 $(Y^0, Y) \to (y^0, y)$ の Jacobi 行列式 J は

$$J = \frac{Y+a}{a} \tag{5.71}$$

であり，この変換は $Y + a > 0$ の範囲では正則である．

2 次元 Minkowski 時空 M_2 の部分領域 $y > |y^0|$ を **Rindler 時空**とよぶ．座標系 (Y^0, Y) は Rindler 時空を覆う座標系である．M_2 全体は，この座標系によっては覆われない．

---

12) ここでは 2 次元時空 M_2 で考えているが，4 次元的に扱ってもこの点に変わりはないことは明らかであろう．

点 O についてコメントしておく．**この点は Rindler 時空外の点であるが，これを無理に座標系 (Y^0, Y) で記述されるかのように扱うと以下にみるように不合理な結論に導かれる．** (Y^0, Y) 系では，点 O は直線 L_θ 上の任意の点 P と同時刻である．ところで，この直線の傾きは $|\theta| < \pi/4$ の範囲で任意である．したがって，例えば，O, P, O_R は互いに同時刻，$a + \sigma > 0$ である任意の σ について $P(0), P(\sigma), O$ も互いに同時刻となり．「Rindler 時空 $y > |y^0|$ の世界点すべてが同時刻である」という不合理なことになってしまう．

5.3 剛体運動

相対論では「可能なすべての運動において，その任意の 2 点 P, Q について $g(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ})$ が不変である物体」としての剛体は存在しない．そこで，特定の条件を満足する運動として剛体運動を定義しよう．

定義 5.3.1. **剛体運動**とは，質点系の運動であって以下の条件 **[R1]**，**[R2]** を共に満足するものをいう[13)]：**[R1]** この質点系に属する任意の質点の世界線上の任意の点において，この世界線と直交する超平面は系に属するすべての質点の世界線に直交する．**[R2]** 系に属する任意の 2 質点の世界線と直交する超平面とのそれぞれの交点間の 4 次元的距離は，これら 2 本の世界線と直交するすべての超平面について共通である．

なお，一般に曲線 Γ と曲面 Σ とが**直交**するとは，これらの交点 P における Γ の接ベクトルと Σ の P における任意の接ベクトルとが直交することをいう．

直観的に表現すれば，剛体運動とはその質点系に属するすべての点が静止状態として観測されるような観測者が存在できて，かつその観測者にとっては各質点間の距離が，時間的に不変に保たれるような運動のことである[14)]．

---

13) この定義は Born によるものである．

14) 航行している宇宙船の場合で考えると，その宇宙船に乗っている観測者にとっては，自分の乗っている宇宙船が運動していないときと同一の大きさで，かつ同一の形に観測されるような運動がその例である．

剛体運動は，4 次元的距離を不変に保つので，Poincaré 変換（≠Poincaré 座標枠変換）の一種である．

5.3.1 棒の短縮

剛体運動をしている棒の短縮について考える．「棒の長さ」を定義 5.2.2 に基づいて以下のように定義する：

定義 5.3.2. 棒 S の両端に位置する質点を A, B と表す．世界点 Q を 1 つ固定して，慣性系 $[O(Q); \vec{E}_0(Q)]$ の時刻 $t \stackrel{\text{def}}{=} x^0/c$ における**質点** A, B **間の定義 5.2.2 の意味での距離** $l \stackrel{\text{def}}{=} D_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{g(\overrightarrow{P_A P_B}, \overrightarrow{P_A P_B})}$ のことを，$[O(Q); \vec{E}_0(Q)]$ の時刻 t における**棒** S **の長さ**という．

剛体運動の例として，棒の各部分が慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ に対して等速度運動 $\longrightarrow$ 一様加速度運動 $\longrightarrow$ 等速度運動という経過を辿る場合を考え，$[O; \vec{E}_0]$ におけるこの棒の長さの時間的変化をみてみよう．棒上の点はパラメーター σ（$0 \leq \sigma \leq L$）で指定されるものとする．棒上の点 $P(\sigma)$ の $[O; \vec{E}_0]$ による位置ベクトル $\vec{x}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{OP(\sigma)}$ は

$$\vec{x}(\sigma) = x^0(\sigma)\vec{E}_0 + \mathbf{x}(\sigma), \qquad \mathbf{x}(\sigma) = x(\sigma)\mathbf{E} \tag{5.72}$$

と表され，a, α, β はすべて正定数で，かつ $\alpha < \beta$ であるものとして，静止状態での長さが L の棒が $\mathbf{E}$ に平行な状態を保ちつつ $\mathbf{E}$ の方向に下記のように運動している状態を考える．

(1) 等速度運動：

$$x(\sigma)\cosh\alpha - x^0(\sigma)\sinh\alpha = a + \sigma, \qquad x^0(\sigma) \leq x(\sigma)\tanh\alpha \tag{5.73}$$

(2) 一様加速度運動：

$$\left.\begin{aligned} x(\sigma) = (a+\sigma)\cosh\chi, \quad x^0(\sigma) = (a+\sigma)\sinh\chi \\ x(\sigma)\tanh\alpha \leq x^0(\sigma) \leq x(\sigma)\tanh\beta \end{aligned}\right\} \tag{5.74}$$

(３)　等速度運動：

$$x(\sigma)\cosh\beta - x^0(\sigma)\sinh\beta = a+\sigma,\quad x(\sigma)\tanh\beta \le x^0(\sigma) \tag{5.75}$$

なお，(5.74) において $x(\sigma)\tanh\alpha \le x^0(\sigma) \le x(\sigma)\tanh\beta$ は $\alpha \le \chi \le \beta$ と同等である[15)].

σ で指定される点は，慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ においては（１）の段階では速さ $U \stackrel{\mathrm{def}}{=} c\tanh\alpha$ で等速度運動しており，（２）の段階では 3 次元的速さ $cx^0(\sigma)/x(\sigma) = c\tanh\chi$，3 次元的加速度の大きさ $(a+\sigma)^2c^2/(x(\sigma))^3$ で加速度運動しており，(３) の段階では 3 次元的速さ $V \stackrel{\mathrm{def}}{=} c\tanh\beta$ で等速度運動している．明らかに，$U \le c\tanh\chi \le V$ である．

(１)〜(３) で記述される運動が剛体運動であることを示そう．

(A)　(１) の段階：L_1 を負の定数とする．超平面

$$x^0\cosh\alpha - x\sinh\alpha = L_1 \tag{5.76}$$

と (5.73) で表される世界線とが任意の σ に対して直交することは明らかである．交点の位置ベクトルは

$$\left.\begin{aligned} X(\sigma) &= (a+\sigma)\cosh\alpha + L_1\sinh\alpha \\ X^0(\sigma) &= (a+\sigma)\sinh\alpha + L_1\cosh\alpha \end{aligned}\right\} \tag{5.77}$$

として，$\vec{X}(\sigma) = X^0(\sigma)\vec{E}_0 + X(\sigma)\mathbf{E}$ と表されるが，$0 \le \sigma_i \le L$ $(i=1,2)$ なる任意の σ_i に対して

$$g(\vec{X}(\sigma_1)-\vec{X}(\sigma_2), \vec{X}(\sigma_1)-\vec{X}(\sigma_2)) = (\sigma_1-\sigma_2)^2 \tag{5.78}$$

であって，これは L_1 の値によらない．

(B)　(２) の段階[16)]：$\alpha \le \chi_0 \le \beta$ とする．超平面

$$x^0\cosh\chi_0 - x\sinh\chi_0 = 0 \tag{5.79}$$

15) ここに χ はギリシャ文字であり，カイと読む．

16) この段階が剛体運動であることは定義 5.2.1 に続く議論を延長することによっても示される．

と (5.74) で表される世界線とは直交する．交点の位置ベクトルは，

$$X(\sigma) = (a+\sigma)\cosh\chi_0, \qquad X^0(\sigma) = (a+\sigma)\sinh\chi_0 \tag{5.80}$$

として，$\vec{X}(\sigma) = X^0(\sigma)\vec{E}_0 + X(\sigma)\mathbf{E}$ で表され，このときも χ_0 の値によらず (5.78) が成り立つ．

(C) （3）の段階： (5.75) で表される世界線と超平面

$$x^0\cosh\beta - x\sinh\beta = L_2 \tag{5.81}$$

とが直交する．ただし，L_2 は正の定数とする．棒の σ_1, σ_2 で指定される部分とこの超平面との交点の位置ベクトル $\vec{X}(\sigma_1)$, $\vec{X}(\sigma_2)$ について (5.78) が成り立つ．

以上 (A)〜(C) により，この運動は剛体運動であることがわかる．

以下では，$(a+L)\sinh\alpha \leq a\sinh\beta$ である場合について，時間経過と共に慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ における棒の長さがどのように変わるかを調べる[17]．

(1-A) $x^0 \leq a\sinh\alpha$ の場合： 棒のすべての部分が (5.73) に従って運動しており，時刻 x^0/c における棒の後端の位置ベクトル $\vec{x}(0)$，先端の位置ベクトル $\vec{x}(L)$ は，それぞれ

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}(0) &= x^0\vec{E}_0 + (x^0\tanh\alpha + a\,\mathrm{sech}\,\alpha)\mathbf{E} \\ \vec{x}(L) &= x^0\vec{E}_0 + \{x^0\tanh\alpha + (a+L)\,\mathrm{sech}\,\alpha\}\mathbf{E} \end{aligned}\right\} \tag{5.82}$$

と表され，このときの棒の長さ $l \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{g(\vec{x}(L)-\vec{x}(0), \vec{x}(L)-\vec{x}(0))}$ は次式で与えられる：

$$l = L\,\mathrm{sech}\,\alpha = L\sqrt{1-\left(\frac{U}{c}\right)^2} \tag{5.83}$$

---

17) $(a+L)\sinh\alpha > a\sinh\beta$ であると，$[O;\vec{E}_0]$ で観測した場合，「先端が第 1 段階の運動中であるにも拘わらず，後端はすでに第 3 段階の運動状態にある」ということが起こる．このような場合についても，以下の議論に対応する議論をすることは容易である．

(1-B)　$a\sinh\alpha \leq x^0 \leq (a+L)\sinh\alpha \leq a\sinh\beta$ の場合：後端は (5.74) に従って加速度運動中であり，先端は (5.73) に従って等速度運動中である．時刻 x^0/c における後端と先端の位置ベクトルは，

$$\left.\begin{aligned} \vec{x}(0) &= a\sinh\chi_0\vec{E}_0 + a\cosh\chi_0\mathbf{E} \\ \vec{x}(L) &= a\sinh\chi_0\vec{E}_0 + \{(a+L)\,\mathrm{sech}\,\alpha + a\sinh\chi_0\tanh\alpha\}\mathbf{E} \end{aligned}\right\} \tag{5.84}$$

で与えられ，棒の長さは

$$l = \{a + L - a\cosh(\chi_0 - \alpha)\}\mathrm{sech}\,\alpha \tag{5.85}$$

となる．なお，$x^0 = a\sinh\chi_0$ と表した．

(2-A)　$(a+L)\sinh\alpha \leq x^0 \leq a\sinh\beta$ の場合：後端も先端も (5.74) に従って加速度運動中であり，$x^0 = a\sinh\chi_0 = (a+L)\sinh\chi_L$ と表すと，時刻 x^0/c における長さ l は

$$l = (a+L)\cosh\chi_L - a\cosh\chi_0 \tag{5.86}$$

となる．

(2-B)　$a\sinh\beta \leq x^0 \leq (a+L)\sinh\beta$ の場合：後端は (5.75) に従って等速度運動中であり，先端は (5.74) に従って加速度運動中である．時刻 x^0/c における長さは

$$l = \{(a+L)\cosh(\beta - \chi_L) - a\}\mathrm{sech}\,\beta \tag{5.87}$$

となる．ここに $x^0 = (a+L)\sinh\chi_L$ と表した．

(3)　$(a+L)\sinh\beta \leq x^0$ の場合：棒全体が (5.75) に従って速さ V で等速度運動中で，このときの長さは次のようになる：

$$l = L\,\mathrm{sech}\,\beta = L\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} \tag{5.88}$$

以上，時間経過と共に棒の長さがどのように変化するかをみた．最初，全体が速さ U の等速度運動をしていて，長さが $L\sqrt{1-(U/c)^2}$ である棒が時間経過と共に一様加速度運動を経て徐々に短くなっていき，最後に全体が速さ V の等速度運動をする状態に至り，その長さは $L\sqrt{1-(V/c)^2}$ となるのである[18)]．$L\sqrt{1-(U/c)^2}$, $L\sqrt{1-(V/c)^2}$ は，**Lorentz 短縮**の式とよばれている．

5.3.2 棒の見かけの長さ，棒からの光の Doppler 効果

前部分節の結果は，剛体運動する棒がその進行方向に短縮することを例示している．しかし，部分節 **5.2.1** の後半部分における議論からわかるように，**上で求めた棒の長さは，この棒を眺めている人の目に見える長さを表しているのではない**．この部分節では，棒の見かけの長さ，および棒の先端と後端からの光の Doppler 効果について検討しよう．

定義 5.2.3 に基づいて，観測者 Ob が世界点 $P(Ob)$ において見る「棒の見かけの長さ」を次のように定義する：

定義 5.3.3. 観測者 Ob がその世界線 $\Gamma(Ob)$ 上のある点 $P(Ob)$ にいるとき，観測者 Ob が世界点 $P(Ob)$ において見る棒 S の両端 A, B 間の見かけの距離 $\hat{l} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{D}_{AB}$ のことを，観測者 Ob が世界点 $P(Ob)$ において見る**棒 S の見かけの長さ**という．

剛体運動をする棒の先端から発射された光を後端に乗っている観測者（R と記す）が受ける場合，後端でその固有時刻 τ' に見える先端の時計の指している時刻 τ，光の Doppler 効果，およびこの観測者にとっての棒の見かけの長さを検討する．

(5.72)〜(5.75) で記述される剛体運動で，簡単のため $\alpha = 0, \exp\beta > 1 + l/a$ である場合について考える．

---

18) 「$a\sinh\alpha \le x^0 \le (a+L)\sinh\beta$ の間，棒が徐々に短くなってゆくこと，すなわち棒の長さは x^0 の狭義の単調減少関数であること」を確認することは，面倒ではあるが難しいことではない．

まず，前段階として棒上の σ で指定される点の世界線に沿う固有時を慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ の時刻 t の関数として $\tau(t,\sigma)$ と記し，これを求めよう．ただし，$\tau(0,\sigma)=0$ ととる．

{1}　$ct \leq 0$ の場合：このときはこの棒全体が静止しており，明らかに $\tau(t,\sigma)=t$ である．

{2}　$0 \leq ct \leq (a+\sigma)\sinh\beta$ の場合：このときは加速度運動中で，(5.61) を参照すればわかるように

$$ct = (a+\sigma)\sinh\chi = (a+\sigma)\sinh\left(\frac{c\tau(t,\sigma)}{a+\sigma}\right) \tag{5.89}$$

である．

{3}　$(a+\sigma)\sinh\beta \leq ct$ の場合：(5.75) により $d\tau(t,\sigma) = dt/\cosh\beta$ であるが，これを積分すると

$$c\tau(t,\sigma) = \frac{ct}{\cosh\beta} + (a+\sigma)(\beta - \tanh\beta) \tag{5.90}$$

が得られる．ただし，**{2}** の結果から示されるように $ct = (a+\sigma)\sinh\beta$ のとき $c\tau(t,\sigma) = (a+\sigma)\beta$ であることを用いた．

光が先端 F にある光源から発射されたときの慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ における時刻を t，これが後端にいる観測者 R に到達するときの $[O;\vec{E}_0]$ における時刻を t' と記す．これらに対応する，F の世界線と R の世界線に沿う固有時を，それぞれ τ, τ' と表す．観測者 R は自己の時計での時刻 τ' には時刻 τ を指している先端 F にある時計を見ることになる．$ct \leq 0$, $0 \leq ct \leq (a+L)\sinh\beta$, $(a+L)\sinh\beta \leq ct$ に対応して，それぞれ $d\tau = dt$, $d\tau = dt/\cosh\chi$, $d\tau = dt/\cosh\beta$ である．ここに $0 \leq ct \leq (a+L)\sinh\beta$ の場合，$ct = (a+L)\sinh\chi$ と表すこととした．また $ct' \leq 0$, $0 \leq ct' \leq a\sinh\beta$, $a\sinh\beta \leq ct'$ に対応して，それぞれ $d\tau' = dt'$, $d\tau' = dt'/\cosh\chi'$, $d\tau' = dt'/\cosh\beta$ である．ここに $0 \leq ct' \leq a\sinh\beta$ の場合，$ct' = a\sinh\chi'$ と表した．棒の先端 F にある光源から振動数 ν の光を発射し続けるものとして，後端に乗っている観測者 R によって観測される光の振動数および R に見える棒の見かけの長さをそれぞれ N_R, $\hat{l}_R$ と記す．

(1) $c\tau' \leq 0$ の場合： この場合は，静止状態にある光源から射出された光が静止状態にある観測者によって受光されることになる．明らかに，$\tau = \tau' - L/c$, $N_R = \nu$, $\hat{l}_R = L$ である．

(2-A) $0 \leq c\tau' \leq a\chi_0$, $\chi_0 \overset{\text{def}}{=} \ln\{(a+L)/a\}$ である場合： この場合は，静止中の光源から射出された光が (5.74) に従って加速度運動中の観測者 R に到達することになる．光を射出する時の光源の世界点 F および受光するときの観測者の世界点 R は，それぞれ

$$F = O + ct\vec{E}_0 + (a+L)\mathbf{E}, \quad R = O + a(\sinh\chi'\vec{E}_0 + \cosh\chi'\mathbf{E}) \tag{5.91}$$

で与えられる．$\overrightarrow{FR}$ は正の光的ベクトルであるから

$$ct = a\exp\chi' - (a+L) \tag{5.92}$$

であり，また，前段階の **{1}**，**{2}** で述べたことにより

$$t = \tau, \qquad \chi' = \frac{c\tau'}{a} \tag{5.93}$$

である．これらにより

$$c\tau = a\exp\left(\frac{c\tau'}{a}\right) - (a+L) \tag{5.94}$$

が得られ，したがって

$$N_R = \nu\frac{d\tau}{d\tau'} = \nu\exp\left(\frac{c\tau'}{a}\right) \geq \nu \tag{5.95}$$

となる．また，(5.91) と (5.92) より

$$\overrightarrow{FR} = (a + L - a\cosh\chi')(\vec{E}_0 - \mathbf{E}) \tag{5.96}$$

が導かれる．

$$\left.\begin{aligned} \vec{E}_0(R) &\overset{\text{def}}{=} \cosh\chi'\vec{E}_0 + \sinh\chi'\mathbf{E} \\ \mathbf{E}(R) &\overset{\text{def}}{=} \sinh\chi'\vec{E}_0 + \cosh\chi'\mathbf{E} \end{aligned}\right\} \tag{5.97}$$

とおくと，$\vec{E}_0(R)$ は観測者 R の世界線の点 R における接ベクトルであり，正の時間的単位ベクトルである．また，$g(\vec{E}_0(R), \mathbf{E}(R)) = 0$, $g(\mathbf{E}(R), \mathbf{E}(R)) = 1$ である．(5.97) を用いると，(5.96) は

$$\overrightarrow{FR} = \exp(\chi')(a + L - a\cosh\chi')\{\vec{E}_0(R) - \mathbf{E}(R)\} \tag{5.98}$$

と書き換えられる．したがって，$\hat{l}_R$ は次式で与えられる：

$$\begin{aligned}\hat{l}_R &= \exp(\chi')(a + L - a\cosh\chi') \\ &= \exp\left(\frac{c\tau'}{a}\right)\left\{a + L - a\cosh\left(\frac{c\tau'}{a}\right)\right\}\end{aligned} \tag{5.99}$$

これらの $N_R, \hat{l}_R$ はいずれも時間経過と共に単調に増加する．$c\tau' = 0$ では $c\tau = -L, N_R = \nu, \hat{l}_R = L$ であり，$c\tau' = a\chi_0$ では

$$\left.\begin{aligned}&c\tau = 0,\ \ N_R = \nu\exp\chi_0 = \nu\frac{a+L}{a} \\ &\hat{l}_R = \exp(\chi_0)(a + L - a\cosh\chi_0) = \frac{L(2a+L)}{2a}\end{aligned}\right\} \tag{5.100}$$

である．

(2-B) $a\chi_0 \le c\tau' \le a\beta$ の場合：このときは，光源，観測者共に (5.74) に従って加速度運動中に光の射出，受光が行われる．このとき F, R は

$$\left.\begin{aligned}F &= O + (a + L)(\sinh\chi\vec{E}_0 + \cosh\chi\mathbf{E}) \\ R &= O + a(\sinh\chi'\vec{E}_0 + \cosh\chi'\mathbf{E})\end{aligned}\right\} \tag{5.101}$$

と表されるが，$\overrightarrow{FR}$ が正の光的ベクトルであることにより χ と χ' の関係は

$$\exp\chi' = \frac{a+L}{a}\exp\chi \tag{5.102}$$

となる．また $c\tau' = a\chi'$, $c\tau = (a+L)\chi$ である．したがって

$$\tau = \frac{a+L}{a}\tau' - \frac{a+L}{c}\ln\left(\frac{a+L}{a}\right), \qquad N_R = \nu\frac{d\tau}{d\tau'} = \nu\frac{a+L}{a} \tag{5.103}$$

となる．この場合も **(2-A)** におけると同様，(5.97) で定義される $\vec{E}_0(R)$, $\mathbf{E}(R)$ による表示

$$\overrightarrow{FR} = \frac{L(2a+L)}{2a}\{\vec{E}_0(R) - \mathbf{E}(R)\} \tag{5.104}$$

が得られる．なお，(5.102) を用いた．したがって，R の見る棒の見かけの長さは

$$\hat{l}_R = \frac{L(2a+L)}{2a} \tag{5.105}$$

である．$a\chi_0 \leq c\tau' \leq a\beta$ の間を通じて，$N_R, \hat{l}_R$ は共に一定である．$c\tau' = a\chi_0$ のときおよび $c\tau' = a\beta$ のとき，それぞれ $c\tau = 0$, $c\tau = (a+L)\beta - (a+l)\ln(1+L/a)$ である．

(3-A) $a\beta \leq c\tau' \leq a\beta + L$ の場合： この場合は，光源が加速度運動中に射出された光が (5.75) に従って等速度運動している観測者に到着することになる．射出時の光源の世界点 F および受光時の観測者の世界点 R は，それぞれ

$$\left.\begin{aligned} F &= O + (a+L)(\sinh\chi\vec{E}_0 + \cosh\chi\mathbf{E}) \\ R &= O + ct'\vec{E}_0 + (ct'\tanh\beta + a\,\mathrm{sech}\,\beta)\mathbf{E} \end{aligned}\right\} \tag{5.106}$$

と表されるが，$\overrightarrow{FR}$ が正の光的ベクトルであることにより

$$\exp\chi = \frac{a + ct'\exp\beta}{(a+L)\cosh\beta} \tag{5.107}$$

なる関係がある．$c\tau = (a+L)\chi$ であり，また (5.90) を用いると

$$ct' = \{c\tau' - a(\beta - \tanh\beta)\}\cosh\beta \tag{5.108}$$

であることがわかる．これらを (5.107) に代入することにより

$$\exp\left(\frac{c\tau}{a+L}\right) = \frac{a(1-\beta) + c\tau'}{a+L}\exp\beta \tag{5.109}$$

が得られる．この式を用いると

$$N_R = \nu\frac{d\tau}{d\tau'} = \nu\frac{a+L}{a(1-\beta)+c\tau'} \tag{5.110}$$

を得る．なお，$a\beta \le c\tau' \le a\beta + L$ であるから $\nu \le N_R \le \nu(a+L)/a$ である．

$$\vec{E}_0(R) \overset{\text{def}}{=} \cosh\beta\vec{E}_0 + \sinh\beta\mathbf{E}, \qquad \mathbf{E}(R) \overset{\text{def}}{=} \sinh\beta\vec{E}_0 + \cosh\beta\mathbf{E} \tag{5.111}$$

とすると $[O;\vec{E}_0(R)]$ は観測者 R の静止系であり，この系は $[O;\vec{E}_0]$ に対して速さ $c\tanh\beta$ で等速度運動している．(5.107) を用いて示されるように，$\overrightarrow{FR}$ の $\vec{E}_0(R)$, $\mathbf{E}(R)$ による表示は

$$\overrightarrow{FR} = \{(a+L)\cosh(\beta-\chi) - a\}\{\vec{E}_0(R) - \mathbf{E}(R)\} \tag{5.112}$$

で与えられる．これより

$$\hat{l}_R = (a+L)\cosh(\beta-\chi) - a \tag{5.113}$$

が得られる．なお，(5.109) により

$$\exp(\beta-\chi) = \frac{a+L}{a(1-\beta)+c\tau'} \tag{5.114}$$

となる．$N_R, \hat{l}_R$ は共に時間の経過と共に単調に減少する．$c\tau' = a\beta$ においては

$$\left.\begin{aligned} c\tau &= (a+L)\left\{\beta - \ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right\} \\ N_R &= \nu\frac{a+L}{a}, \quad \hat{l}_R = \frac{L(2a+L)}{2a} \end{aligned}\right\} \tag{5.115}$$

であり，$c\tau' = a\beta + L$ においては $c\tau = (a+L)\beta, N_R = \nu, \hat{l}_R = L$ となる．

(3-B) $a\beta + L \le c\tau'$ の場合： この場合は，光源，観測者は共に (5.75) に従って等速度運動中に光の射出，受光が行われる．容易に示されるように，$c\tau = c\tau' + (\beta-1)L, N_R = \nu, \hat{l}_R = L$ であり，$c\tau' = a\beta + L$ のとき $c\tau = (a+L)\beta$ である．

光源 F と観測者 R の間の距離（$=$ 棒の長さ）は棒と共に運動する R にとって時間的に一定であるにもかかわらず，**(2-A)**，**(2-B)**，**(3-A)** すべてにおいて，$N_R \geq \nu$ であること，すなわち「光の色は青方偏移している」こと，および $\hat{l}_R \geq L$ であること，すなわち「棒は伸長して見える」こと，各時間帯で，$N_R, \hat{l}_R$ の時間的な増減が相伴っていることに注意しよう.「相互の距離が伸びて見える」にも拘わらず，青方偏移しており，また相互の距離が伸びて見える度合いの増減と青方偏移の度合いの増減とが相応している訳で，逆説的な現象が**見える**のである．なお，この運動の間，当初の段階 (1) と最後の段階 **(3-B)** では $d\tau/d\tau' = 1$，すなわち観測者 R は自己の時計と同じ進み方をする F にある時計を見る．中間の段階 **(2-A)**〜**(3-A)** では，$d\tau/d\tau' > 1$ であり，R は自己の時計よりも速く時を刻む F にある時計を目にすることになる．$\tau' \leq 0$ では，R には時刻 $\tau = \tau' - L/c < \tau'$ を指している時計が見えるが，時間の経過と共に差 $\tau' - \tau$ は減少し，$(a\beta + L)/c$ 以後の時刻 τ' には時刻 $\tau' + (\beta - 1)L/c$ を指している F にある時計を見ることになる．$\beta - 1 > 0$ である場合には，途中の段階 **(2-A)**〜**(3-A)** のある時点で，R は自己の時計が指している時刻と同時刻を指している F にある時計を目にして，それ以降は自己の時計の指している時刻 τ' よりも後の時刻 τ を指している F にある時計を見ることになる．

$\exp\beta \leq 1 + L/a$ である場合[19]，$0 < \alpha$ である場合，先端にいる観測者が後端からの光を見る場合，等々についても同様に議論することができる．先端にいる観測者が後端にある光源からの光を見る場合には，ある時間帯棒が短縮して見え，同時に赤方偏移が観測されることになる．

この棒を宇宙船と見なすと，この宇宙船の加速度運動は剛体運動であるが，これに乗っている観測者の目に見える宇宙船室内の時計の刻む時間，距離および色彩は，同じく剛体運動である等速度運動をしている場合に見えるものとは異なっている．

これまで考えてきた剛体運動，すなわち，(5.72)〜(5.75) で記述される運動で $\alpha = 0$, $\exp\beta > 1 + L/a$ である場合について，棒が静止状態にあるときの棒の後端の位置から距離 a だけ後方の位置に静止している観測者，す

---

19) $\exp\beta \leq 1 + L/a$ である場合は，「最終段階の等速度運動に入っている後端の観測者に未だ静止している先端の光源からの光が到達する」という現象が起こる．

なわち世界線が

$$E(t') = O + ct'\vec{E}_0 \tag{5.116}$$

で表される観測者の目に時刻 t' に映る棒の見かけの長さ，棒の両端にある時計の時刻，およびこれらの端から振動数 ν の光を射出し続ける場合に観測者の見る光の振動数を検討する．観測者を E と記し，E の目に見える，棒の見かけの長さ，後端からの光の振動数，先端からの光の振動数を，それぞれ $\hat{l}_E, N_{E1}, N_{E2}$ と記す．また後端，先端の世界点をそれぞれ R, F で表す．

(1) $ct' \leq a$ の場合：E には棒の長さは L と見え，両端からの光は共に振動数 ν として観測される．時刻 $\tau_1 = t' - a/c$ を指している後端の時計，時刻 $\tau_2 = t' - (a+L)/c$ を指している先端の時計が見える．

(2) $a \leq ct' \leq a+L$ の場合：この場合は加速度運動中の後端，静止中の先端が見える．時刻 t' に見える後端，先端の位置は，$\overrightarrow{RE}, \overrightarrow{FE}$ が正の光的ベクトルであることにより

$$\left.\begin{aligned} R &= O + a(\sinh\chi_1\vec{E}_0 + \cosh\chi_1\mathbf{E}) \\ F &= O + (ct' - L - a)\vec{E}_0 + (a+L)\mathbf{E} \end{aligned}\right\} \tag{5.117}$$

と表される．ここに

$$\exp\chi_1 = \frac{ct'}{a} \tag{5.118}$$

である．したがって

$$\overrightarrow{RF} = \left\{\frac{(ct'-a)^2}{2ct'} - L\right\}(\vec{E}_0 - \mathbf{E}) \tag{5.119}$$

である．棒の長さは

$$\hat{l}_E = L - \frac{(ct'-a)^2}{2ct'} \tag{5.120}$$

に見える．これは時間変数 t' の単調減少関数で，$ct' = a$ のとき $\hat{l}_E = L$，$ct' = a+L$ のとき $\hat{l}_E = L(2a+L)/\{2(a+L)\}$ である．

時刻 t' に見える後端からの光は，(5.117) の第1式からわかるよ

うに，$[O;\vec{E}_0]$ で計って，時刻 $a\sinh\chi_1/c$ に後端を出たものである．(5.89) と (5.118) から示されるように，そのときの固有時刻は

$$\tau_1 = \frac{a\chi_1}{c} = \frac{a}{c}\ln\left(\frac{ct'}{a}\right) \tag{5.121}$$

である．すなわち，観測者 E に見える後端の時計は時刻 τ_1 を示している．E に見える先端の時計が時刻 $\tau_2 = t' - (a+L)/c$ を指していることは，(5.117) の第 2 式から明らかである．したがって，後端から来る光は振動数 $N_{E1} = \nu d\tau_1/dt' = a\nu/ct'$ として，また先端からの光は振動数 $N_{E2} = \nu$ として観測されることとなる．なお，$N_{E1} \leq N_{E2} \leq \nu$ であり，$N_{E1} = N_{E2}$ となるのは $ct' = a$ のときで，このとき $N_{E1} = N_{E2} = \nu$ である．

(3) $a + L \leq ct' \leq a\exp\beta$ の場合[20]：このときは加速度運動中の後端，先端からの光が目に入る．後端の位置 R は (5.117) の第 1 式で与えられる．先端の位置 F は

$$\exp\chi_2 = \frac{ct'}{a+L} \tag{5.122}$$

なる χ_2 を用いて

$$F = O + (a+L)(\sinh\chi_2\vec{E}_0 + \cosh\chi_2\mathbf{E}) \tag{5.123}$$

と表される．ここに $\overrightarrow{FE}$ が正の光的ベクトルであることを用いた．(5.117) の第 1 式，(5.122) および (5.123) より $\overrightarrow{RF}$ の表示が求められ，これにより棒の長さは

$$\hat{l}_E = (a+L)\cosh\chi_2 - a\cosh\chi_1 = \frac{L(2a+L)}{2ct'} \tag{5.124}$$

と見えることになる．$ct' = a + L$ では $\hat{l}_E = L(2a+L)/2(a+L)$ である．また，$ct' = a\exp\beta$ では $\hat{l}_E = L(2a+L)\exp(-\beta)/2a$ である．

時刻 t' に観測者 E に見える後端の時計の指している固有時刻は (5.121) における τ_1 で与えられる．時刻 t' に E に見える先端の時計

20) $\exp\beta > 1 + L/a$ としていることに注意.

の指している時刻を τ_2 とすると，(5.89) と (5.122) を用いて示されるように

$$\tau_2 = \frac{a+L}{c}\ln\left(\frac{ct'}{a+L}\right) \tag{5.125}$$

である．したがって，後端からの光の振動数は $N_{E1} = a\nu/(ct')$ として観測され，先端からの光は振動数

$$N_{E2} = \nu\frac{d\tau_2}{dt'} = \nu\frac{a+L}{ct'} \tag{5.126}$$

の光として観測されることになる．なお，$N_{E1} < N_{E2} < \nu$ である．

(4)　$a\exp\beta \leq ct' \leq (a+L)\exp\beta$ の場合：この場合は等速度運動中の後端，加速度運動中の先端からの光が目に入る．後端の位置 R は

$$\begin{aligned} R = O &+ \exp(-\beta)\{ct'\cosh\beta - a\}\vec{E}_0 \\ &+ \exp(-\beta)\{ct'\sinh\beta + a\}\mathbf{E} \end{aligned} \tag{5.127}$$

で与えられる．ここで，$\overrightarrow{RE}$ が正の光的ベクトルであることを用いた．先端の位置 F は (5.123) で与えられる．(5.122)，(5.123) および (5.127) から $\overrightarrow{RF}$ が求められ，観測者 E に見える棒の長さは

$$\hat{l}_E = \frac{1}{2}\left\{ct' + \frac{(a+L)^2}{ct'}\right\} - \exp(-\beta)\{ct'\sinh\beta + a\} \tag{5.128}$$

となる．この $\hat{l}_E$ は時間経過と共に単調に減少して，$ct' = a\exp\beta$ のときは $\hat{l}_E = L(2a+L)\exp(-\beta)/2a$ であり，$ct' = (a+L)\exp\beta$ のときは $\hat{l}_E = L\exp(-\beta)$ である．(5.90) と (5.127) から示されるように，観測者 E には時刻

$$\tau_1 = t'\exp(-\beta) + \frac{a}{c}(\beta - 1) \tag{5.129}$$

を指している後端の時計が見える．また，先端の時計は (5.125) の τ_2 の表示で与えられる時刻を指しているのが見える．

後端から来る光は振動数

$$N_{E1} = \nu\frac{d\tau_1}{dt'} = \nu\exp(-\beta) = \sqrt{\frac{c-V}{c+V}}\,\nu \tag{5.130}$$

の光として観測され，先端から来る光は (5.126) の N_{E2} の表示で与えられる振動数の光として観測される．なお，$N_{E1} \leq N_{E2} < \nu$ であり，$N_{E1} = N_{E2} = \sqrt{(c-V)/(c+V)}\nu$ となるのは $ct' = (a+L)\exp\beta$ のときである．

(5) $(a+L)\exp\beta \leq ct'$ の場合： この場合は共に等速度運動中の後端，先端からの光が見える．後端の位置 R は (5.127) の表示で与えられ，先端の位置 F は

$$F = O + \exp(-\beta)\{ct\cosh\beta - (a+L)\}\vec{E}_0 + \exp(-\beta)\{ct\sinh\beta + (a+L)\}\mathbf{E} \tag{5.131}$$

で与えられる．したがって $\overrightarrow{RF} = -L\exp(-\beta)(\vec{E}_0 - \mathbf{E})$ となり，棒の見かけの長さは

$$\hat{l}_E = L\exp(-\beta) = L\sqrt{\frac{c-V}{c+V}} \tag{5.132}$$

である．後端の時計は，(5.129) で与えられる時刻 τ_1 を指しているのが見える．また，時刻

$$\tau_2 = t\exp(-\beta) + \frac{a+L}{c}(\beta - 1) \tag{5.133}$$

を指している先端の時計が見える．後端，先端からの光は振動数

$$N_{E1} = \nu\frac{d\tau_1}{dt'} = \nu\sqrt{\frac{c-V}{c+V}} = \nu\frac{d\tau_2}{dt'} = N_{E2} \tag{5.134}$$

の光として観測される．

この場合の棒の後端 R（観測者 R），先端 F，および両端から出る光，観

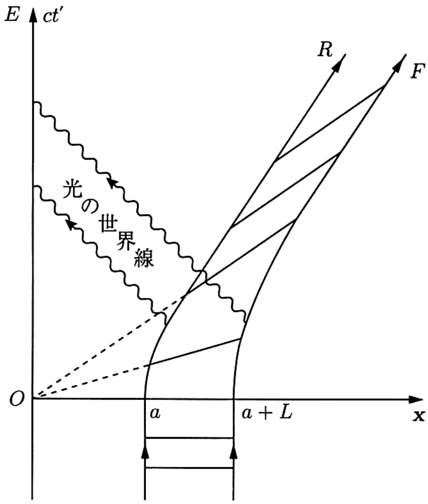


図 **5.5** R, F, E の世界線および R, F から射出される光の世界線

測者 E の世界線は図 5.5 のように表される[21]．

棒が静止しているときに後端が存在した場所から a だけ後方の位置（空間座標の原点）に留まっている観測者 E にとっては，棒は長さ L から単調に減少して最後に長さ $\sqrt{(c-V)/(c+V)}L$ になるように見え，また，棒の両端から射出される振動数 ν の光は，いずれも振動数 ν から単調に減少して最後には振動数 $\sqrt{(c-V)/(c+V)}\nu$ の光として観測されることとなる．その間，$a < ct' < (a+L)\exp\beta$ を満足する時刻 t' では，後端からの光の振動数の方が先端からの光の振動数よりも小さいものとして観測されるのである．なお，棒の後端，先端それぞれにある時計を E が見る場合，それらの時計の示す時刻はそれぞれ τ_1, τ_2 であるが，それらの進行の遅速はこれまでの議論から容易に読み取ることができよう．

$\exp\beta \leq 1 + L/a$ である場合，$0 < \alpha$ である場合等々についても同様に議論することができる[22]．

---

21) 観測者 E の世界線は $\vec{E}_0$ 軸と一致する．

22) $\exp\beta \leq 1 + L/a$ である場合は，加速度運動中の後端からの光が観測者 E に届いている間中，静止中の先端からの光が観測者 E の目に入ることになる．

5.4 電磁場，電気量密度および電流密度

電磁気学に関わる 2 つの問題について考察しよう．

5.4.1 電場と磁束密度（磁場と電束密度）

真空中の電磁場について考える．(4.151) と (4.152) で定義される 2– 形式 $F, \tilde{F}$ について，

$$\left.\begin{aligned} I_1 &\overset{\text{def}}{=} K_2(F,F) = -\frac{1}{c^2}K_1(E,E) + K_2(B,B) \\ I_2 &\overset{\text{def}}{=} K_2(\tilde{F},F) = \frac{1}{c^2}K_1(H,E) + K_2(D,B) \\ I_3 &\overset{\text{def}}{=} K_2(\tilde{F},\tilde{F}) = -\frac{1}{c^2}K_1(H,H) + K_2(D,D) \end{aligned}\right\} \tag{5.135}$$

を考える．ここに，K_1, K_2 は (3.63) で定義された内積を表す[23)]．これらはすべて Minkowski 時空上のスカラー場である．なお，(4.164) を用いて示されるように $|\varepsilon_0|I_1 + |\mu_0|I_3 = 0$ であり，I_1 と I_3 とは独立ではない．

これらの量は，例えば次のように用いられる．

命題 5.4.1. ある慣性系における電場 E，磁束密度 B について $E = 0$, $B \neq 0$ であるものとすると，任意の慣性系 $[O'; \vec{E}'_0]$ における磁束密度 B' について $B' \neq 0$ である．$E \neq 0, B = 0$ であれば，任意の慣性系 $[O'; \vec{E}'_0]$ における電場 E' について $E' \neq 0$ である．

証明： ある慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ において $E = 0$, $B \neq 0$ であるものとすると，$I_1 = K_2(B,B) > 0$ である．ある慣性系 $[O'; \vec{E}'_0]$ における磁束密度 B' について $B' = 0$ と仮定してみると，$c^2 I_1 = -K_1(E', E') \leq 0$ となって矛盾が生じてしまう．なお，E' はこの慣性系における電場を表す．したがって，命題の前半部分が成り立つ．同様にして，後半部分も成り立つことがわかる．

特殊相対論にあっては電場と磁束密度とは慣性系の変換のもとで互いに入り混じって変換するが，**ある慣性系で電場（磁束密度）のみが 0 でない**

23) より精確にいえば，その括弧内の量が $F, \tilde{F}$ である場合については，Minkowski 時空 M_4 上の微分形式についての内積を表し，括弧内の量が E, H, B, D である場合については，3 次元空間 S 上の微分形式についての内積を表している．

場合には，磁束密度（電場）のみが0でないような慣性系は存在しない．電場と磁束密度とは異質のものなのである．

磁場 H と電束密度 D についても，(5.135) における I_3 の表示に基づいて同様の議論をすることができる．また，I_2 の表示も同様に用いることができる．

スカラー量を用いた上のような論法は，物理学の種々の場面で常套的に用いられている．

5.4.2　電気量密度と3次元的電流密度

0でない電気量 q をもつ点電荷が慣性系 $[O;\vec{E}_0]$ において，一定の3次元的速度 $\mathbf{U}$ で運動しているときの電気量密度 $\rho^{(\mathrm{e})}$，3次元的電流密度 j を考察する．$\mathcal{M}_4=\mathcal{T}\times\mathcal{S}$ の時空的－時間的－空間的に正の正規直交座標枠 $[O;(\vec{E}_0,\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3)]$ とこの座標枠に関する座標系 (X^0,X^1,X^2,X^3) を用いる．$\rho^{(\mathrm{e})},j$ の世界点 $P=O+ct\vec{E}_0+\mathbf{X}$, $g(\vec{E}_0,\mathbf{X})=0$ における値は[24]，

$$\left.\begin{aligned}\rho^{(\mathrm{e})}(P)&=q\delta^{(3)}(\mathbf{X}-\mathbf{U}t-\mathbf{Y}_0)dX^1\wedge dX^2\wedge dX^3\\ j(P)&=\frac{1}{2!}qE_{abc}U^a\delta^{(3)}(\mathbf{X}-\mathbf{U}t-\mathbf{Y}_0)dX^b\wedge dX^c\end{aligned}\right\}\qquad(5.136)$$

と表される．ここに，$\delta^{(3)}$ は3次元デルタ関数 $\delta^{(3)}(\mathbf{X})=\delta^{(3)}(X^a\mathbf{E}_a)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\delta(X^1)\delta(X^2)\delta(X^3)$ を表し，E_{abc} は $(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2,\mathbf{E}_3)$ によって張られる線型空間上の3次交代形式の成分で $E_{123}=1$ であるものとする．また，$\mathbf{U}=U^a\mathbf{E}_a$ とし，点電荷の位置を $Q(t)=O+ct\vec{E}_0+\mathbf{Y}(t)$, $g(\vec{E}_0,\mathbf{Y}(t))=0$ と表し，$\mathbf{Y}_0\stackrel{\mathrm{def}}{=}\mathbf{Y}(0)$ ととった．(したがって，$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{U}t+\mathbf{Y}_0$ である.)

Minkowski 時空 M_4 上の (4.153) で定義される3− 形式 J の共役 $\star J$ は1− 形式，すなわち共変ベクトル場である．そこで，反変ベクトル

$$\vec{J}(P)\stackrel{\mathrm{def}}{=}c\kappa(\star J(P))=J^0(P)\vec{E}_0+\mathbf{J}(P)\qquad(5.137)$$

を考える[25]．ここに

---

24) (4.83) を参照.

25) κ は (3.49) で定義される ζ の逆写像である.

$$J^0(P) \stackrel{\text{def}}{=} cq\delta^{(3)}(\mathbf{X}-\mathbf{U}t-\mathbf{Y}_0),\quad \mathbf{J}(P) \stackrel{\text{def}}{=} q\mathbf{U}\delta^{(3)}(\mathbf{X}-\mathbf{U}t-\mathbf{Y}_0) \tag{5.138}$$

であり，$g(\vec{E}_0, \mathbf{J}(P)) = 0$ である．慣性系 $[O'; \vec{E}'_0]$ をとって

$$\vec{J}(P) = J'^0(P)\vec{E}'_0 + \mathbf{J}'(P), \qquad g(\vec{E}'_0, \mathbf{J}'(P)) = 0 \tag{5.139}$$

と表す．(4.127)〜(4.129) を用いることにより，

$$J'^0(P) = \frac{\gamma q}{c}\{c^2 - g(\mathbf{U},\mathbf{v})\}\delta^{(3)}(\mathbf{X}-\mathbf{U}t-\mathbf{Y}_0) \tag{5.140}$$

$$\mathbf{J}'(P) = q\delta^{(3)}(\mathbf{X}-\mathbf{U}t-\mathbf{Y}_0)\left[\frac{c}{c^2-v^2}\{g(\mathbf{U},\mathbf{v})-v^2\}\vec{E}_0 + \frac{1}{c^2-v^2}\{g(\mathbf{U},\mathbf{v})-c^2\}\mathbf{v}+\mathbf{U}\right] \tag{5.141}$$

が得られる．ここに，$\gamma, \mathbf{v}$ は，(4.129) におけるものである．(5.140) において，$g(\mathbf{U},\mathbf{v}) < c^2$ であるから，慣性系 $[O'; \vec{E}'_0]$ をどのように選んでも，$J'^0(P) \neq 0$ であり，また (5.141) によれば，$\mathbf{v} = \mathbf{U}$ であれば $\mathbf{J}'(P) = \mathbf{0}$ となる．

ところで，慣性系 $[O'; \vec{E}'_0]$ における電気量密度，3 次元的電流密度をそれぞれ $\rho^{(\mathrm{e})\prime}$, j' と表すと，容易にわかるように，$J'^0(P) \neq 0$ と $\rho^{(\mathrm{e})\prime}(P) \neq 0$ とは同等であり，$\mathbf{J}'(P) = \mathbf{0}$ と $j'(P) = 0$ とは同等である．したがって,「電気量密度が 0 になるような慣性系は存在しないが，$\mathbf{v} = \mathbf{U}$ であるような慣性系（= 点電荷の静止系）に対しては 3 次元的電流密度は 0 となる[26)]」ことがわかる．電気量の存否は慣性系のとり方によらない絶対的事実であり，電流は荷電物質の流れという運動状態に依存する量であるから，これは当然の結果である．

一般に，電気量 q の点電荷が任意の運動をしているときの（4 次元）電流密度 J の世界点 P における値 $J(P)$ は，(x^0, x^1, x^2, x^3) を P の近傍で定義された局所座標系として，

$$J(P) = \frac{q}{3!}\left\{\int_a^b \frac{d\Gamma^\rho(\tau)}{d\tau}\varepsilon_{\rho\mu\nu\lambda}(P)\,\delta^{(4)}{}_{\Gamma(\tau)}(P)d\tau\right\}(dx^\mu \wedge dx^\nu \wedge dx^\lambda)_P \tag{5.142}$$

26）これと類似のこととして,「質点のエネルギー運動量ベクトル $\vec{P} = P^0\vec{E}_0 + \mathbf{P}$ は時間的ベクトルであり，$\mathbf{P} = \mathbf{0}$ であるような慣性系 $[O; \vec{E}_0]$ は存在するが，$P^0 = W/c = 0$ となる慣性系は存在しない」ということがある．

で与えられる．ここに，点電荷の世界線を $\Gamma(\tau)$ $(a \le \tau \le b)$ と表し，$\Gamma^{\mu}(\tau) \overset{\text{def}}{=} x^{\mu}(\Gamma(\tau))$ とおいて

$$\frac{D\Gamma(\tau)}{D\tau} = \frac{d\Gamma^{\mu}(\tau)}{d\tau}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\right)_{\Gamma(\tau)} \tag{5.143}$$

とした．また，$\varepsilon_{\rho\mu\nu\lambda} \overset{\text{def}}{=} e^{n}{}_{\rho}e^{k}{}_{\mu}e^{l}{}_{\nu}e^{m}{}_{\lambda}E_{nklm}$ であり，$\delta^{(4)}{}_{A}$ は，A を時空 M_4 の点とするとき，$P \neq A$ である M_4 の点 P における値 $\delta^{(4)}{}_{A}(P)$ は 0 であり，M_4 の A を含む任意の向き付けられた有界領域 V に対して

$$\int_V \delta^{(4)}{}_{A} \star 1 = 1 \tag{5.144}$$

が成り立つものとして定義される4次元デルタ関数である．正規直交座標枠 $[O; (\vec{E}_0, \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)]$ をとって $A = O + A^k\vec{E}_k$, $P = O + X^k\vec{E}_k$ と表すと，$\delta^{(4)}{}_{A}(P) = \delta(X^0 - A^0)\delta(X^1 - A^1)\delta(X^2 - A^2)\delta(X^3 - A^3)$ である．

なお，当然のことながら，**$q \neq 0$ である限り電流密度 J は 0 ではない**．このことは，4元速度 $\vec{u}(\tau) = D\Gamma(\tau)/D\tau$ が任意の τ $(a \le \tau \le b)$ に対して時間的ベクトルである（したがって零ベクトルではない）ことから明らかである．

付 録 A　命題の証明

第 1 章〜3 章において断りなく証明を与えていない命題の証明を与える．

命題 1.1.2 の証明： 十分条件であることを示そう．任意のスカラー a，S の任意の元 $\vec{u}, \vec{v}$ について，$a \cdot \vec{u} \in S$, $\vec{u} \oplus \vec{v} \in S$ であることを前提とする．線型空間の定義（= 定義 1.1.1）の条件 [**L1**] が満足されていること，すなわち系 $\{S; \oplus\}$ が可換群であることを示そう．前提と命題 1.1.1 の (3) により，S の任意の元 $\vec{u}$ に対して $-\vec{u} = (-1) \cdot \vec{u} \in S$ である．このことと前提によって，S の任意の元 $\vec{u}, \vec{v}$ について $(-\vec{u}) \oplus \vec{v} \in S$ である．ゆえに付録 **B** の命題 B.4 によって $\{S, \oplus\}$ は可換群 $\{V, \oplus\}$ の**部分群**であり，したがってまた $\{S, \oplus\}$ は可換群である．定義 1.1.1 の条件 [**L2**] が満足されていることは $\mathcal{V}$ が線型空間であることによって明らかである．ゆえに $\mathcal{S}$ は $\mathcal{V}$ の部分線型空間である．かくて十分条件であることが示された．必要条件であることは明らかである．よって命題は成り立つ．

命題 1.1.3 の証明： 十分条件であることを示そう．$\mathcal{V}$ の任意のベクトル $\vec{v}$ が $\mathcal{S}$ のベクトル $\vec{s}$ と $\mathcal{T}$ のベクトル $\vec{t}$ を用いて一意的に $\vec{v} = \vec{s} \oplus \vec{t}$ と表されるものとすると，$\mathcal{V} = \mathcal{S} + \mathcal{T}$ である．また，$\vec{a} \in S \cap T$ とすると，$\vec{a} = \vec{0} \oplus \vec{a}$, $\vec{0} \in S$, $\vec{a} \in T$ および $\vec{a} = \vec{a} \oplus \vec{0}$, $\vec{a} \in S$, $\vec{0} \in T$ という表示が成り立つ．前提によれば，ベクトル $\vec{a}$ の $\mathcal{S}$ のベクトルと $\mathcal{T}$ のベクトルの和としての表示は一意的であるから $\vec{a} = \vec{0}$ である．すなわち，$S \cap T = \{\vec{0}\}$ である．したがって，$\mathcal{V} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{T}$ である．

次に，必要条件であることを示す．$\mathcal{V} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{T}$ とすると，直和の定義から明らかなように $\mathcal{V}$ の任意のベクトル $\vec{v}$ に対して $\mathcal{S}$ のベクトル $\vec{s}$, $\mathcal{T}$ のベクトル $\vec{t}$ が存在して $\vec{v} = \vec{s} \oplus \vec{t}$ と表される．この表示の一意性を示そう．$\mathcal{S}$ のベクトル $\vec{s}'$，$\mathcal{T}$ のベクトル $\vec{t}'$ が存在して $\vec{v} = \vec{s}' \oplus \vec{t}'$ と表されるならば $\vec{s} \oplus \vec{t} = \vec{s}' \oplus \vec{t}'$ となるから，$\vec{s} - \vec{s}' = \vec{t}' - \vec{t} \in S \cap T = \{\vec{0}\}$ となって，$\vec{s}' = \vec{s}$, $\vec{t}' = \vec{t}$ を得る．すなわち，$\mathcal{V}$ の任意のベクトルは $\mathcal{S}$ のベクトルと $\mathcal{T}$ のベクトルの和として一意的に表される．

かくて必要条件であることがわかった．以上によって命題が証明された．

命題 1.1.7 の証明：V と W とが線型同型であるものとして，f を V から W の上への線型同型写像とする．V の零ベクトル $\vec{0}_V$ に対して

$$f(\vec{0}_V) = f(\vec{0}_V + \vec{0}_V) = f(\vec{0}_V) + f(\vec{0}_V) \tag{A.1}$$

であるから，$f(\vec{0}_V)$ は W の零ベクトル $\vec{0}_W$ である．$\dim V = 0$ の場合，V の元は $\vec{0}_V$ のみであり，$f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$ である．また，f は W の**上への写像**である．したがって W の元は $\vec{0}_W$ のみ，つまり $\dim W = 0 = \dim V$ である．

次に，m を自然数として $\dim V = m$ である場合を考える．$\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m\}$ を V の基底とする．f は V から W の**上への 1 対 1 の写像**であるから，W の任意の元 $\vec{w}$ に対して $f(\vec{v}) = \vec{w}$ であるような $\vec{v} \in V$ が一意的に存在する．$\vec{v} = \sum_{\mu=1}^{m} v^\mu \vec{e}_\mu$, $v^\mu \in R$ と表し，また $\vec{h}_\mu \overset{\text{def}}{=} f(\vec{e}_\mu)$ とおくと

$$\vec{w} = f(\vec{v}) = f\left(\sum_{\mu=1}^{m} v^\mu \vec{e}_\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{m} v^\mu \vec{h}_\mu \tag{A.2}$$

となる．かくて，W の任意のベクトルは $\{\vec{h}_1, \cdots, \vec{h}_m\}$ の線型結合として表されることがわかった．また，c^μ $(\mu = 1, 2, \cdots, m)$ を実数として

$$\sum_{\mu=1}^{m} c^\mu \vec{h}_\mu = \vec{0}_W \tag{A.3}$$

とおくと，

$$f\left(\sum_{\mu=1}^{m} c^\mu \vec{e}_\mu\right) = \sum_{\mu=1}^{m} c^\mu \vec{h}_\mu = \vec{0}_W = f(\vec{0}_V) \tag{A.4}$$

となるが，この式および f は 1 対 1 であることにより

$$\sum_{\mu=1}^{m} c^\mu \vec{e}_\mu = \vec{0}_V \tag{A.5}$$

が得られる．ところで $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m\}$ は線型独立であるから $c^\mu = 0$ $(\mu = 1, 2, \cdots, m)$ となり，$\{\vec{h}_1, \cdots, \vec{h}_m\}$ は線型独立であることがわかる．以上のことと命題 1.1.4 により，$\{\vec{h}_1, \cdots, \vec{h}_m\}$ は W の基底であること，したがってまた $\dim W = m = \dim V$ であることがわかる．

逆に，$\dim V = \dim W$ であるものとする．$\dim V = \dim W = 0$ の場合，V, W の元はそれぞれ零ベクトル $\vec{0}_V$, $\vec{0}_W$ のみである．そこで

$$f(\vec{0}_V) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{0}_W \tag{A.6}$$

により写像 $f : V \to W$ を定義する．また m を自然数として $\dim V = \dim W = m$ の場合は，$\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m\}$ を V の基底，$\{\vec{h}_1, \cdots, \vec{h}_m\}$ を W の基底とする．このとき，

$$f(\vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu=1}^{m} v^\mu \vec{h}_\mu, \quad \forall \vec{v} = \sum_{\mu=1}^{m} v^\mu \vec{e}_\mu \in V \tag{A.7}$$

により写像 $f : V \to W$ を定義する．このように定義された写像 f は V から W の上への線型同型写像であり，したがって V と W とは線型同型であることが容易にわかる．以上により命題が証明された．

命題 1.1.8 の証明：まず，線型空間の定義（= 定義 1.1.1）における条件 **[L1]** が満足されていること，すなわち $\{L(V, W); 田\}$ は可換群であることを示そう．f, g, h を $L(V, W)$ の任意の 3 元とする．明らかに $f 田 g \in L(V, W)$ である．また

$$\begin{aligned}((f 田 g) 田 h)(\vec{u}) &= (f 田 g)(\vec{u}) + h(\vec{u}) = (f(\vec{u}) + g(\vec{u})) + h(\vec{u}) \\ &= f(\vec{u}) + (g(\vec{u}) + h(\vec{u})) = f(\vec{u}) + (g 田 h)(\vec{u}) \\ &= (f 田 (g 田 h))(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in V \end{aligned} \tag{A.8}$$

であり，したがって $(f 田 g) 田 h = f 田 (g 田 h)$ が成り立つ．さらに，$\vec{0}_W$ を W の零ベクトルとして

$$\theta(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{0}_W, \quad \forall \vec{u} \in V \tag{A.9}$$

により θ を定義すると，$\theta \in L(V, W)$ であり

$$\begin{aligned}(f 田 \theta)(\vec{u}) &= f(\vec{u}) + \theta(\vec{u}) = f(\vec{u}) + \vec{0}_W = f(\vec{u}) \\ &= \vec{0}_W + f(\vec{u}) = \theta(\vec{u}) + f(\vec{u}) = (\theta 田 f)(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in V \end{aligned} \tag{A.10}$$

が成り立つ．したがって，$f 田 \theta = f = \theta 田 f$ となる．かくて，単位元 θ が存在することが示された．

$$(-f)(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} -f(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in V \tag{A.11}$$

により $-f$ を定義すると $-f \in L(V, W)$ であり，また

$$(f \boxplus (-f))(\vec{u}) = f(\vec{u}) + (-f)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + (-f(\vec{u})) = \vec{0}_W = \theta(\vec{u})$$
$$= (-f(\vec{u})) + f(\vec{u}) = (-f)(\vec{u}) + f(\vec{u}) = ((-f) \boxplus f)(\vec{u}), \ \ \forall \vec{u} \in V \tag{A.12}$$

である．したがって $f \boxplus (-f) = \theta = (-f) \boxplus f$ が成り立ち，f の逆元 $-f$ が存在することがわかる．さらに

$$(f \boxplus g)(\vec{u}) = f(\vec{u}) + g(\vec{u}) = (g \boxplus f)(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in V \tag{A.13}$$

であるから，$f \boxplus g = g \boxplus f$ が得られる．以上により $\{L(V, W); \boxplus\}$ は可換群であることが示された．a, b を任意の 2 つの実数，f, g を $L(V, W)$ の任意の 2 元とする．

$$((a \oplus b) \boxtimes f)(\vec{u}) = (a \oplus b) f(\vec{u}) = af(\vec{u}) + bf(\vec{u})$$
$$= (a \boxtimes f)(\vec{u}) + (b \boxtimes f)(\vec{u}) = ((a \boxtimes f) \boxplus (b \boxtimes f))(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in V \tag{A.14}$$

であるから，$(a \oplus b) \boxtimes f = (a \boxtimes f) \boxplus (b \boxtimes f)$ が成り立つ．また

$$(a \boxtimes (f \boxplus g))(\vec{u}) = a((f \boxplus g)(\vec{u})) = a(f(\vec{u}) + g(\vec{u})) = af(\vec{u}) + ag(\vec{u})$$
$$= (a \boxtimes f)(\vec{u}) + (a \boxtimes g)(\vec{u}) = ((a \boxtimes f) \boxplus (a \boxtimes g))(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in V \tag{A.15}$$

であり，したがって $a \boxtimes (f \boxplus g) = (a \boxtimes f) \boxplus (a \boxtimes g)$ が得られる．さらに

$$((a \times b) \boxtimes (f))(\vec{u}) = (a \times b) f(\vec{u}) = a(bf(\vec{u})) = a((b \boxtimes f)(\vec{u}))$$
$$= (a \boxtimes (b \boxtimes f))(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in V \tag{A.16}$$

であるから，$(a \times b) \boxtimes f = a \boxtimes (b \boxtimes f)$ が成り立つ．最後に

$$(1 \boxtimes f)(\vec{u}) = 1f(\vec{u}) = f(\vec{u}), \quad \forall \vec{u} \in V \tag{A.17}$$

であること，したがって $1 \boxtimes f = f$ であることがわかり，かくて定義 1.1.1 における条件 **[L2]** が満足されることが示された．以上を総合すると，$\mathcal{L}(V, W)$ は線型空

間であることがわかる．

命題 1.2.3 の証明：（１）任意の実数 a_1, a_2，V^* の任意の元 f^1, f^2 に対して

$$(N(\vec{v}))(a_1 f^1 + a_2 f^2) = (a_1 f^1 + a_2 f^2)(\vec{v}) = a_1(f^1(\vec{v})) + a_2(f^2(\vec{v})) \\ = a_1(N(\vec{v}))(f^1) + a_2(N(\vec{v}))(f^2) \qquad \text{(A.18)}$$

であるから，$N(\vec{v}) \in V^{**}$ である．ここで $N(\vec{v})$ の定義および V^* における和とスカラー倍の定義を用いた．

（２）任意の実数 a^1, a^2，V の任意のベクトル $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ に対して

$$(N(a^1\vec{v}_1 + a^2\vec{v}_2))(f) = f(a^1\vec{v}_1 + a^2\vec{v}_2) = a^1(N(\vec{v}_1))(f) + a^2(N(\vec{v}_2))(f) \\ = (a^1 N(\vec{v}_1) + a^2 N(\vec{v}_2))(f), \quad \forall f \in V^* \qquad \text{(A.19)}$$

が成り立つ．なお $N(\vec{v})$ の定義，f が線型写像であることおよび V^{**} における元の和とスカラー倍の定義を用いた．(A.19) により，$N(a^1\vec{v}_1 + a^2\vec{v}_2) = a^1 N(\vec{v}_1) + a^2 N(\vec{v}_2)$ であること，すなわち $N : V \to V^{**}$ は線型写像であることがわかる．次に $\vec{0}^{**}$ を V^{**} の零ベクトルとして $N(\vec{v}) = \vec{0}^{**}$ とする．$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ を V の基底とし，$\mathcal{E}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{e}^1, \cdots, \vec{e}^n\}$ をその双対基底とする．$\vec{v}$ を $\vec{v} = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \vec{e}_\mu$ と表すと，$v^\mu = \vec{e}^\mu(v) = (N(\vec{v}))(\vec{e}^\mu) = 0 \ \ (\mu = 1, 2, \cdots, n)$ となる．ゆえに，$\vec{v} = \vec{0}$ である．したがって，$N : V \to V^{**}$ は単写である．ところで $\dim V = \dim V^* = \dim (V^*)^* = \dim V^{**}$ であるから，N は全写でもある．以上により，（２）が成り立つことがわかった．

命題 1.2.5 の証明：$n_i \stackrel{\text{def}}{=} \dim V_i \ \ (i = 1, 2, \cdots, p)$ とする．$\{\vec{e}_{i,1}, \cdots, \vec{e}_{i,n_i}\}$ を V_i の基底とする．$\mu_k = 1, 2, \cdots, n_k \ \ (k = 1, 2, \cdots, p)$ に対して，

$$\vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p}(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p) \stackrel{\text{def}}{=} {v_1}^{\mu_1} \cdots {v_p}^{\mu_p}, \quad \forall \vec{v}_i = \sum_{\mu=1}^{n_i} {v_i}^\mu \vec{e}_{i,\mu} \in V_i \qquad \text{(A.20)}$$

で定義される $n_1 \cdots n_p$ 個の $\vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p}$ を考える．これらが ${V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^*$ の元であることは容易にわかる．$\{\vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p} | \mu_k = 1, 2, \cdots, n_k,\ k = 1, 2, \cdots, p\}$ の線型独立性を示そう．${V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^*$ の零ベクトルを θ と表すことにして

$$\sum_{\mu_1, \cdots, \mu_p} C_{\mu_1 \cdots \mu_p} \vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p} = \theta \qquad \text{(A.21)}$$

とおく[1)]．すると $\nu_k = 1, 2, \cdots, n_k \ (k = 1, 2, \cdots, p)$ に対して

$$\left(\sum_{\mu_1, \cdots, \mu_p} C_{\mu_1 \cdots \mu_p} \vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p} \right) (\vec{e}_{1,\nu_1}, \cdots, \vec{e}_{p,\nu_p}) = C_{\nu_1 \cdots \nu_p} = 0 \tag{A.22}$$

である．ゆえに $\{\vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p} | \mu_k = 1, 2, \cdots, n_k, \ k = 1, 2, \cdots, p\}$ は線型独立である．$V_1{}^* \otimes \cdots \otimes V_p{}^*$ の任意の元 f に対して

$$\begin{aligned} f(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p) &= \sum_{\mu_1, \cdots, \mu_p} v_1{}^{\mu_1} \cdots v_p{}^{\mu_p} f(\vec{e}_{1,\mu_1}, \cdots, \vec{e}_{p,\mu_p}) \\ &= \sum_{\mu_1, \cdots, \mu_p} f(\vec{e}_{1,\mu_1}, \cdots, \vec{e}_{p,\mu_p}) \vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p} (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p) \\ &= \left(\sum_{\mu_1, \cdots, \mu_p} f(\vec{e}_{1,\mu_1}, \ldots, \vec{e}_{p,\mu_p}) \vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p} \right) (\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p) \\ & \qquad \forall \vec{v}_i = \sum_{\mu=1}^{n_i} v_i{}^{\mu} \vec{e}_{i,\mu} \in V_i \end{aligned} \tag{A.23}$$

であり，したがって

$$f = \sum_{\mu_1, \cdots, \mu_p} f(\vec{e}_{1,\mu_1}, \cdots, \vec{e}_{p,\mu_p}) \vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p} \tag{A.24}$$

となる．ゆえに命題 1.1.4 により，$\{\vec{e}^{\mu_1 \cdots \mu_p} | \mu_k = 1, 2, \cdots, n_k, \ k = 1, 2, \cdots, p\}$ は $V_1{}^* \otimes \cdots \otimes V_p{}^*$ の基底であり，$\dim(V_1{}^* \otimes \cdots \otimes V_p{}^*) = n_1 \cdots n_p = \dim V_1 \times \cdots \times \dim V_p$ であることがわかる．

命題 1.2.10 の証明： $f^k = \sum_{\mu=1}^{n} f^k{}_{\mu} \vec{e}^{\mu} \quad (k = 1, 2, \cdots, p)$ を V^* の任意の元，$\vec{v}_i = \sum_{\nu=1}^{n} v_i{}^{\nu} \vec{e}_{\nu} \ (i = 1, 2, \cdots, q)$ を V の任意のベクトルとすると，

$$\vec{e}_{\mu_1 \cdots \mu_p}{}^{\nu_1 \cdots \nu_q} (f^1, \cdots, f^p, \vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_q) = f^1{}_{\mu_1} \cdots f^p{}_{\mu_p} v_1{}^{\nu_1} \cdots v_q{}^{\nu_q} \tag{A.25}$$

である．以下，命題 1.2.5 の証明と同様にして本命題が成り立つことが示される．

命題 1.2.23 の証明： V の任意のベクトル $\vec{v}_i \ (i = 1, 2, \cdots, p+q)$ に対して

$$\begin{aligned} &\{A_{p+q}(s \otimes t)\}(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p, \vec{v}_{p+1}, \cdots, \vec{v}_{p+q}) \\ &\quad = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, s(\vec{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \vec{v}_{\sigma(p)})\, t(\vec{v}_{\sigma(p+1)}, \cdots, \vec{v}_{\sigma(p+q)}) \end{aligned} \tag{A.26}$$

---

1) 和を表す記号 $\sum_{\mu_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{\mu_p=1}^{n_p}$ のことを $\sum_{\mu_1, \cdots, \mu_p}$ と略記する．

である．$H \stackrel{\text{def}}{=} \{\sigma | \sigma \in \mathfrak{S}_{p+q},\ \sigma(p+j) = p+j,\ j = 1, 2, \cdots, q\}$ として，$\mathfrak{H} \stackrel{\text{def}}{=} \{H, \circ\}$ を考えると，これは $\mathfrak{S}_{p+q}$ の部分群であり $\mathfrak{S}_p$ に**同型**である．$\mathfrak{S}_{p+q}$ は部分群 $\mathfrak{H}$ に関する有限個の**左剰余類の直和**に分解される．$\{\sigma_i | i = 1, 2, \cdots, k\}$ をこの**左剰余類**の**代表系**として，この分解を $\mathfrak{S}_{p+q} = \oplus_{i=1}{}^k \sigma_i \mathfrak{H}$ と表すと[2]，(A.26) の右辺は

$$\frac{1}{(p+q)!} \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{\tau \in \mathfrak{H}} \operatorname{sgn}(\sigma_i \tau) s \left(\vec{v}_{\sigma_i(\tau(1))}, \cdots, \vec{v}_{\sigma_i(\tau(p))} \right) \times t(\vec{v}_{\sigma_i(p+1)}, \cdots, \vec{v}_{\sigma_i(p+q)}) \right) \tag{A.27}$$

となる．ここで $\tau \in \mathfrak{H}$ に対しては $\tau(p+j) = p+j \ \ (j = 1, 2, \cdots, q)$ であることを用いた．i を固定して $\vec{w}_{\tau(l)} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{v}_{\sigma_i(\tau(l))} \ \ (l = 1, 2, \cdots, p)$ とおいて，$\tau \in \mathfrak{H}$ であることと $\operatorname{sgn}(\sigma_i \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma_i) \cdot \operatorname{sgn}(\tau)$ を用いると，(A.27) の大括弧の中の項は

$$\left(\sum_{\tau \in \mathfrak{H}} \operatorname{sgn}(\tau) s(\vec{w}_{\tau(1)}, \cdots, \vec{w}_{\tau(p)}) \right) \operatorname{sgn}(\sigma_i) t(\vec{v}_{\sigma_i(p+1)}, \cdots, \vec{v}_{\sigma_i(p+q)}) \tag{A.28}$$

となる．$\mathfrak{H}$ は，$\mathfrak{S}_p$ と同型であることおよび $s \in N_p(V)$ であることに注意すると，(A.28) の大括弧内の項は $p!\,(A_p s)(\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_p) = 0$ に等しいことがわかる．以上をまとめると，$A_{p+q}(s \otimes t) = 0$，すなわち $s \otimes t \in N_{p+q}(V)$ であることがわかる．

命題 1.2.25 の証明：(1.71) は，$\wedge$ の定義，テンソル積の演算に対する分配律 (1.30) および A_{p+q} が線型変換であることによって明らかである．(1.72) を示そう．

$$\begin{aligned} s \wedge (t \wedge u) &= \frac{\{p + (q+r)\}!}{p!\,(q+r)!} A_{p+(q+r)} \left[s \otimes \left\{ \frac{(q+r)!}{q!\,r!} A_{q+r}(t \otimes u) \right\} \right] \\ &= \frac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!} A_{p+q+r}[s \otimes \{A_{q+r}(t \otimes u)\}] \end{aligned} \tag{A.29}$$

である．一方，$A_{q+r}(t \otimes u)$ は $A_{q+r}(t \otimes u) = t \otimes u - \{t \otimes u - A_{q+r}(t \otimes u)\}$ と表されるが，$\{t \otimes u - A_{q+r}(t \otimes u)\} \in N_{q+r}(V)$ であり，したがって命題 1.2.23 により $s \otimes \{t \otimes u - A_{q+r}(t \otimes u)\} \in N_{p+q+r}(V)$ である．ゆえに $A_{p+q+r}[s \otimes \{t \otimes u - A_{q+r}(t \otimes u)\}] = 0$ となる．これらのことと A_{p+q+r} の線型性により，

$$A_{p+q+r}[s \otimes \{A_{p+q}(t \otimes u)\}] = A_{p+q+r}\{s \otimes (t \otimes u)\} \tag{A.30}$$

---

[2] 付録 **B** の **B.2**，**B.3** 節を参照．

が得られる．(A.29)，(A.30) より，

$$s \wedge (t \wedge u) = \frac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!} A_{p+q+r}\{s \otimes (t \otimes u)\} \tag{A.31}$$

が帰結する．上と同様にして，

$$(s \wedge t) \wedge u = \frac{(p+q+r)!}{p!\,q!\,r!} A_{p+q+r}\{(s \otimes t) \otimes u\} \tag{A.32}$$

が示される．(A.31)，(A.32) および結合律 (1.31) により (1.72) を得る．

命題 1.2.26 の証明： (1.73) を用いると

$$\begin{aligned}(f^1 \wedge \cdots \wedge f^p)(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p) &= \{p!\,A_p(f^1 \otimes \cdots \otimes f^p)\}(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)\\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\sigma)(f^1 \otimes \cdots \otimes f^p)(\vec{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \vec{v}_{\sigma(p)})\\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\sigma) f^1(\vec{v}_{\sigma(1)}) \cdots f^p(\vec{v}_{\sigma(p)}) = \det(f^i(\vec{v}_j))\end{aligned} \tag{A.33}$$

となり，(1.74) が得られる．なお，最後の段階で行列式のその要素による展開式を用いた．(1.75) を示そう．V の任意の元 $\vec{v}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$ に対して

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\sigma) f^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f^{\sigma(p)}\right)(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_p)\\ &\qquad = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}(\sigma) f^{\sigma(1)}(\vec{v}_1) \cdots f^{\sigma(p)}(\vec{v}_p) = \det(f^i(\vec{v}_j))\end{aligned} \tag{A.34}$$

である．このことと (1.74) により，(1.75) が成り立つことがわかる．

命題 1.3.7 の証明： $Q(\vec{u}) = 0,\ \forall \vec{u} \in V$ の場合は，明らかに V の基底のとり方に無関係に $(a, b) = (0, 0)$ である．$Q(\vec{a}) \neq 0$ なる $\vec{a} \in V$ が存在する場合について考えよう．V のある基底 $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n\}$ に対して $\vec{u} = u^\mu \vec{e}_\mu$ とするとき，$Q(\vec{u})$ が (1.91) と表されたものとする．この場合は $(a, b) \neq (0, 0)$ である．V のある基底 $\mathcal{E}' = \{\vec{e}'_1, \cdots, \vec{e}'_n\}$ に対して $\vec{u} = u'^\mu \vec{e}'_\mu$ とするとき，$Q(\vec{u}) = -\sum_{\nu=1}^{a'} (u'^\nu)^2 + \sum_{\nu=1}^{b'} (u'^{a'+\nu})^2$ と表されたものとする．以下で示すように $a = a'$, $b = b'$ である．まず，$a \leq a'$ であることを示そう．$a' = n$ の場合は，明らかに $a \leq a' = n$ である．$a' < n$ の場合について考えよう．次に示すように，$a + n - a'$ 個のベクトルの組 $\{\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_a, \vec{e}'_{a'+1}, \cdots, \vec{e}'_n\}$ は線型独立である．

$$\sum_{\mu=1}^{a} c^\mu \vec{e}_\mu + \sum_{\nu=1}^{n-a'} c'^{a'+\nu} \vec{e}'_{a'+\nu} = 0 \tag{A.35}$$

とすると，

$$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu=1}^{a} c^{\mu}\vec{e}_{\mu} = -\sum_{\nu=1}^{n-a'} c'^{a'+\nu}\vec{e}'_{a'+\nu} \tag{A.36}$$

に対して $Q(\vec{v}) = -\sum_{\mu=1}^{a}(c^{\mu})^2 = \sum_{\nu=1}^{n-a'}(c'^{a'+\nu})^2$ が成り立つ．このことおよび $(c^{\mu})^2, (c'^{a'+\nu})^2$ はすべて 0 以上であることにより $Q(\vec{v}) = 0$ となり，この式から $c^{\mu} = c'^{a'+\nu} = 0 \quad (\mu = 1,2,\cdots,a,\ \nu = 1,2,\cdots,n-a')$ が帰結する．ゆえに $\{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_a,\vec{e}'_{a'+1},\cdots,\vec{e}'_n\}$ は線型独立である．ところで $\dim V = n$ であるから $a + n - a' \leq n$ となり，$a \leq a'$ が得られる．同様にして $a' \leq a$ であることがわかり，したがって $a = a'$ である．同様にして $b = b'$ であることが示される．したがって命題が成り立つ．

命題 1.3.17 の証明: $\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\}$ を $V^{(a,n-a)}$ の基底とする．$f(\vec{u})$ は $V^{(a,n-a)}$ 上の p 階交代反変テンソルであるから，$f(\vec{u})$ は $f^{\mu_1\cdots\mu_p}(\vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} (f(\vec{u}))(\vec{e}^{\mu_1},\cdots,\vec{e}^{\mu_p})$ を用いて $f(\vec{u}) = (1/p!)f^{\mu_1\cdots\mu_p}(\vec{u})\vec{e}_{\mu_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\mu_p}$ と表される．反変ベクトル $\overrightarrow{F^{\mu_1\cdots\mu_p}} \stackrel{\text{def}}{=} g^{\lambda\rho}f^{\mu_1\cdots\mu_p}(\vec{e}_{\lambda})\vec{e}_{\rho}$ を考えると，容易に示されるように

$$\left.\begin{aligned} g(\overrightarrow{F^{\mu_1\cdots\mu_p}},\vec{u}) = f^{\mu_1\cdots\mu_p}(\vec{u}), \quad \forall\vec{u} \in V^{(a,n-a)} \\ (\mu_1,\cdots,\mu_p = 1,2,\cdots,n) \end{aligned}\right\} \tag{A.37}$$

である．$f^{\mu_1\cdots\mu_p}$ と (A.37) の関係にある反変ベクトル $\overrightarrow{F^{\mu_1\cdots\mu_p}}$ は一意的に定まることを示そう．$\overrightarrow{F^{\mu_1\cdots\mu_p}}$ の他にそのような反変ベクトル $\overrightarrow{G^{\mu_1\cdots\mu_p}}$ が仮にあるものとすると

$$g(\overrightarrow{F^{\mu_1\cdots\mu_p}} - \overrightarrow{G^{\mu_1\cdots\mu_p}},\vec{u}) = 0, \quad \forall\vec{u} \in V^{(a,n-a)} \tag{A.38}$$

となる．$\overrightarrow{F^{\mu_1\cdots\mu_p}} - \overrightarrow{G^{\mu_1\cdots\mu_p}} = A^{\mu_1\cdots\mu_p\lambda}\vec{e}_{\lambda}$ と表すと，$g(A^{\mu_1\cdots\mu_p\lambda}\vec{e}_{\lambda},\vec{u}) = A^{\mu_1\cdots\mu_p\lambda}u^{\nu}g(\vec{e}_{\lambda},\vec{e}_{\nu}) = A^{\mu_1\cdots\mu_p\lambda}u^{\nu}g_{\lambda\nu} = 0, \forall\vec{u} = u^{\nu}\vec{e}_{\nu}$ が得られる．u^{ν} は任意の実数であることおよび行列 $(g_{\lambda\nu})$ が正則であることにより，$A^{\mu_1\cdots\mu_p\lambda} = 0 \ (\lambda = 1,2,\cdots,n)$ が帰結する．ゆえに $\overrightarrow{G^{\mu_1\cdots\mu_p}} = \overrightarrow{F^{\mu_1\cdots\mu_p}}$ となる．すなわち，$f^{\mu_1\cdots\mu_p}$ と (A.37) の関係にある反変ベクトル $\overrightarrow{F^{\mu_1\cdots\mu_p}}$ は一意的であって，それは $\overrightarrow{F^{\mu_1\cdots\mu_p}} \stackrel{\text{def}}{=} g^{\lambda\rho}f^{\mu_1\cdots\mu_p}(\vec{e}_{\lambda})\vec{e}_{\rho}$ で与えられる．したがって $f(\vec{u})$ は一意的に

$$f(\vec{u}) = \frac{1}{p!}g(\overrightarrow{F^{\mu_1\cdots\mu_p}},\vec{u})\vec{e}_{\mu_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\mu_p} = \frac{1}{p!}s^{\mu_1\cdots\mu_p\nu}u_{\nu}\vec{e}_{\mu_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\mu_p} \tag{A.39}$$

と表される．ここに $s^{\mu_1\cdots\mu_p\nu} \stackrel{\text{def}}{=} g^{\nu\lambda} g(\overrightarrow{F^{\mu_1\cdots\mu_p}}, \vec{e}_\lambda)$ とおいた．したがって $f(\vec{u}) \oslash \vec{u} = s^{\mu_1\cdots\mu_{p-1}\lambda\nu} u_\nu u_\lambda \vec{e}_{\mu_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\mu_{p-1}}/(p-1)! = 0$ となる．ここで (1.107) と (1.111) を用いた．$\{\vec{e}_{\mu_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\mu_{p-1}} | \mu_1 < \cdots < \mu_{p-1},\ \mu_1, \cdots, \mu_{p-1} = 1, 2, \cdots, n\}$ が線型独立であることおよび u_μ が任意であることにより，$s^{\mu_1\cdots\mu_{p-1}\nu\lambda} = -s^{\mu_1\cdots\mu_{p-1}\lambda\nu}$ が導かれる．ところで $s^{\mu_1\cdots\mu_p\nu}$ は $\mu_1, \cdots, \mu_p$ について交代であるから，結局 $p+1$ 個のすべての添数について交代であることになる．

そこで

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(p+1)!} s^{\mu_1\cdots\mu_{p+1}} \vec{e}_{\mu_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\mu_{p+1}} \tag{A.40}$$

とおくと，これは $p+1$ 階交代反変テンソルであり，(1.112) の表示 $f(\vec{u}) = s \oslash \vec{u} = (-1)^p \vec{u} \oslash s$ が成り立つ．この表示の一意性を示そう．2 つの $p+1$ 階交代反変テンソル s, s' に対して $s \oslash \vec{u} = s' \oslash \vec{u}$ であるものとすると，

$$(s - s') \oslash \vec{u} = \frac{1}{(p+1)!}(s^{\mu_1\cdots\mu_p\nu} - s'^{\mu_1\cdots\mu_p\nu}) u_\nu \vec{e}_{\mu_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\mu_p} = 0$$
$$\forall \vec{u} = u^\nu \vec{e}_\nu \in V^{(a,n-a)} \tag{A.41}$$

となる．ここに $s^{\mu_1\cdots\mu_p\nu}$，$s'^{\mu_1\cdots\mu_p\nu}$ は，それぞれテンソル s, s' の基底 $\mathcal{E}$ に関する成分とする．$\vec{u}$ は任意であること，(A.41) および $\{\vec{e}_{\mu_1} \curlywedge \cdots \curlywedge \vec{e}_{\mu_p} | \mu_1 < \cdots < \mu_p,\ \mu_1, \cdots, \mu_p = 1, 2, \cdots, n\}$ が線型独立であることにより $s'^{\mu_1\cdots\mu_p\nu} = s^{\mu_1\cdots\mu_p\nu}$ $(\nu, \mu_1, \cdots, \mu_p = 1, 2, \cdots, n)$ となり，$s' = s$ であることがわかる．かくて，表示 (1.112) の一意性が示された．以上により命題が成り立つことがわかる．

命題 1.3.21 の証明： 写像 $\star : A_p(V_o^{(a,n-a)}) \to A_{n-p}(V_o^{(a,n-a)})$ が線型写像であること，すなわち任意の実数 a_i, 任意の p 次交代形式 ω_i $(i = 1, 2)$ に対して

$$\star(a_1\omega_1 + a_2\omega_2) = a_1 \star \omega_1 + a_2 \star \omega_2 \tag{A.42}$$

であることは $\star$ の定義により明らかである．単写であることを示そう．$p = 0$ の場合，$p = n$ の場合については，このことは明らかである．$p = 1, 2, \cdots, n-1$ の場合について考える．$\star\omega = 0$ とすると，ν_k $(k = 1, 2, \cdots, n-p)$ を $1 \leq \nu_1 < \cdots < \nu_{n-p} \leq n$ を満足する整数として，(1.121) の第 2 式で $\vec{v}_k = \vec{e}_{\nu_k}$ と置いた式を用いて

$$\star\omega(\vec{e}_{\nu_1},\cdots,\vec{e}_{\nu_{n-p}}) = \sum_{\mu_1<\cdots<\mu_p} \omega^{\mu_1\cdots\mu_p}\omega_V(\vec{e}_{\mu_1},\cdots,\vec{e}_{\mu_p},\vec{e}_{\nu_1},\cdots,\vec{e}_{\nu_{n-p}}) = 0 \quad (1\leq p\leq n-1) \tag{A.43}$$

を得る．この式の $\mu_1 < \cdots < \mu_p$ についての和に現れる項で，$\{\mu_1,\cdots,\mu_p\}$ が $\{1,2,\cdots,n\}$ における $\{\nu_1,\cdots,\nu_{n-p}\}$ の**補集合**でないものは明らかに 0 である．$\{\mu_1,\cdots,\mu_p\}$ が $\{1,2,\cdots,n\}$ における $\{\nu_1,\cdots,\nu_{n-p}\}$ の補集合であるものについて考える．例えば，$\{\nu_1,\cdots,\nu_{n-p}\} = \{p+1,p+2,\cdots,n\}$ の場合を考えると，

$$\star\omega(\vec{e}_{p+1},\cdots,\vec{e}_n) = \omega^{1\cdots p}\omega_V(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n) = \pm\,\omega^{1\cdots p} = 0 \quad (1\leq p\leq n-1) \tag{A.44}$$

となる．上の式の $\pm\,\omega^{1\cdots p}$ における複号 $\pm$ は $(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)$ の属する向きが正であるか負であるかに応じて $+$ あるいは $-$ をとることを表す．$\{\nu_1,\cdots,\nu_{n-p}\}$ として可能なすべての場合を考えることにより，$\omega^{\mu_1\cdots\mu_p}=0$ $(1\leq\mu_1<\cdots<\mu_p\leq n)$ を導くことができる．よって，$\star\omega=0$ ならば，$\omega=0$ である．したがって，$\star$ は単写である．ところで $\dim A_p(V_o^{a,n-a}) = {}_n\mathrm{C}_p = {}_n\mathrm{C}_{n-p} = \dim A_{n-p}(V_o^{(a,n-a)})$ であるから，$\star$ は全写でもある．以上により，写像 $\star : A_p(V_o^{(a,n-a)}) \to A_{n-p}(V_o^{(a,n-a)})$ は線型同型写像であることがわかった．

命題 1.3.22 の証明：$p=0$ の場合については，(1.116) の $p=0$ の場合の表示と (1.114) から明らかである．$p=1,2,\cdots,n-1$ の場合について考える．(1.116) によれば，$\star(\vec{E}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{i_p}) = i(\kappa(\vec{E}^{i_p}))\cdots i(\kappa(\vec{E}^{i_1}))\omega_V$ である．したがって

$$\begin{aligned}
&\left(\star(\vec{E}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{i_p})\right)(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p})\\
&\quad=\omega_V\left(\kappa(\vec{E}^{i_1}),\cdots,\kappa(\vec{E}^{i_p}),\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p}\right)\\
&\quad=\frac{1}{n!}\varepsilon_{k_1\cdots k_p l_1\cdots l_{n-p}}\eta^{i_1j_1}\cdots\eta^{i_pj_p}\\
&\qquad\times(\vec{E}^{k_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{k_p}\wedge\vec{E}^{l_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{l_{n-p}})\\
&\qquad\times(\vec{E}_{j_1},\cdots,\vec{E}_{j_p},\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p})
\end{aligned} \tag{A.45}$$

である．ここに，(1.114) と $\kappa(\vec{E}^i) = \eta^{ij}\vec{E}_j$ を用いた．さらに，命題 1.2.26 の (1.74)，$\vec{E}^i(\vec{E}_j) = \delta^i{}_j$ および (1.123) を用いると，(A.45) から

$$
\begin{aligned}
&\left(\star(\vec{E}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{i_p})\right)(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p})\\
&\quad=\frac{1}{(n-p)!}\varepsilon^{i_1\cdots i_p}{}_{j_1\cdots j_{n-p}}(\vec{E}^{j_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{j_{n-p}})(\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_{n-p})
\end{aligned}
\tag{A.46}
$$

が得られ，したがって $p=1,2,\cdots,n-1$ の場合について (1.122) が成り立つことがわかる．$p=n$ の場合については，(1.116) によれば

$$
\begin{aligned}
\star(\vec{E}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{i_n}) &= i(\kappa(\vec{E}^{i_n}))\cdots i(\kappa(\vec{E}^{i_1}))\omega_V\\
&=\frac{1}{n!}\varepsilon_{k_1\cdots k_n}\eta^{i_1j_1}\cdots\eta^{i_nj_n}(\vec{E}^{k_1}\wedge\cdots\wedge\vec{E}^{k_n})(\vec{E}_{j_1},\cdots,\vec{E}_{j_n})\\
&=\varepsilon^{i_1\cdots i_n}
\end{aligned}
\tag{A.47}
$$

となって，この場合も (1.122) が得られる．

命題 2.1.3 の証明：まず，$\mathcal{N}$ についてアフィン空間の定義（= 定義 2.1.1）における 3 つの条件が満足されていることを示そう．$P_0=F_{\vec{0}}(P_0)$ であり $\vec{0}\in W$ であるから，$P_0\in N$ である．また，$\mathcal{M}$ がアフィン空間であるから，N は明らかに M の部分集合である．W の任意の元 $\vec{w}$ に対して，写像 $F_{\vec{w}}$ の**定義域**を N に制限したものを $G_{\vec{w}}$ と表すと，$F_{\vec{w}}$ は $\mathcal{M}$ における平行移動であるから N の任意の点 P に対して $G_{\vec{w}}(P)\in M$ が定義されている．$P\in N$ であるから，$P=G_{\vec{a}}(P_0)$ であるような $\vec{a}\in W$ が存在する．したがって，$G_{\vec{w}}(P)=G_{\vec{w}}(G_{\vec{a}}(P_0))=G_{\vec{w}+\vec{a}}(P_0)\in N$ である．ここで，$\mathcal{M}$ における写像 $F_{\vec{u}}$ について (2.2) が成り立つことおよび $\vec{w}+\vec{a}\in W$ であることを用いた．ゆえに，$G_{\vec{w}}(N)\stackrel{\text{def}}{=}\{G_{\vec{w}}(P)|P\in N\}$ は N の部分集合である．したがって，$\mathcal{N}$ は条件 **[A1]** を満足する．

次に，条件 **[A2]** が満足されることを示そう．N の任意の 2 点 P,Q は M の点でもあるから，$Q=F_{\vec{u}}(P)$ なる $\vec{u}\in V$ は一意的に存在する．ゆえに $Q=G_{\vec{u}}(P)=F_{\vec{u}}(P)$ なる $\vec{u}\in W$ は存在したとしても 1 つである．N の定義により，$P=G_{\vec{a}}(P_0),Q=G_{\vec{b}}(P_0)$ であるような W の 2 元 $\vec{a},\vec{b}$ が存在する．したがって $Q=G_{\vec{b}}(P_0)=G_{\vec{b}}(G_{-\vec{a}}(P))=G_{\vec{b}-\vec{a}}(P)$, $\vec{b}-\vec{a}\in W$ となる．ここで，命題 2.1.1 の (3) が $\mathcal{M}$ において成り立つことを用いた．かくて，条件 **[A2]** が満足されることがわかった．W の任意の 2 つのベクトルに対して $G_{\vec{a}}\circ G_{\vec{b}}=G_{\vec{a}+\vec{b}}$ が成り立つことは，$\mathcal{M}$ における平行移動 $F_{\vec{a}},F_{\vec{b}}$ が対応する式 (2.2) を満足することによって明らかである．したがって，条件 **[A3]** も満足される．また，W の次元数は r であ

る．ゆえに $\mathcal{N}$ は r 次元アフィン空間である．$\mathcal{N}$ が部分アフィン空間の定義（= 定義 2.1.3）の 3 つ条件を満足することは N と $G_{\vec{w}}$ の定義から明らかである．

命題 2.1.5 の証明: 十分条件であること：アフィン写像 (ϕ, f) における $f: V_1 \to V_2$ が線型同型写像であるものとする．アフィン空間の定義（= 定義 2.1.1）の [A2] により，M_2 の任意の点 Q_2, M_1 の任意の点 P_1 に対して，$Q_2 = \phi(P_1) + \vec{u}_2$ であるような V_2 のベクトル $\vec{u}_2$ が一意的に存在する．f は全写であるから，$\vec{u}_2 = f(\vec{u}_1)$ なる V_1 のベクトル $\vec{u}_1$ が存在し $Q_2 = \phi(P_1) + f(\vec{u}_1)$ と表される．一方，$Q_1 \overset{\text{def}}{=} P_1 + \vec{u}_1$ とおくと $Q_1 \in M_1$ であり，したがってまたアフィン写像について成り立つ関係 (2.13) によって $\phi(Q_1) = \phi(P_1) + f(\vec{u}_1) = \phi(P_1) + \vec{u}_2 = Q_2$ となる．ゆえに ϕ は全写である．次に，$\phi(Q_1) = \phi(P_1)$, $P_1, Q_1 \in M_1$ とする．(2.13) によって $\phi(Q_1) = \phi(P_1) + f(\overrightarrow{P_1Q_1})$ であるから，$f(\overrightarrow{P_1Q_1}) = \vec{0}$ となる．ところで f は単写であるから $\overrightarrow{P_1Q_1} = \vec{0}$，すなわち $Q_1 = P_1$ が帰結する．したがって，ϕ は単写である．かくて，十分条件であることが示された．

必要条件であること：写像 $\phi: M_1 \to M_2$ が全単写であるものとする．V_2 の任意のベクトル $\vec{u}_2$，M_1 の任意の点 P_1 に対して，$Q_2 \overset{\text{def}}{=} \phi(P_1) + \vec{u}_2$ とおく．ϕ は全写であるから，$Q_2 = \phi(Q_1)$ であるような M_1 の点 Q_1 が存在し，$\phi(Q_1) = \phi(P_1) + \vec{u}_2$ となる．一方，(2.13) によって $\phi(Q_1) = \phi(P_1) + f(\overrightarrow{P_1Q_1})$, $\overrightarrow{P_1Q_1} \in V_1$ であり，$\vec{u}_2 = f(\overrightarrow{P_1Q_1})$ が得られる．したがって，f は全写である．次に，V_1 のベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ に対して $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$ とすると $f(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$ となる．M_1 の任意の点 P_1 をとって $Q_1 \overset{\text{def}}{=} P_1 + \vec{u} - \vec{v}$ とおくと，(2.13) によって $\phi(Q_1) = \phi(P_1) + f(\vec{u} - \vec{v}) = \phi(P_1)$ となるが，ϕ は単写であるから，$Q_1 = P_1$ が帰結する．したがって $\vec{u} = \vec{v}$ となり，f は単写であることがわかる．かくて，必要条件であることが示された．

命題 2.1.8 の証明: (1) $\mathcal{M} \overset{\text{def}}{=} \{M; V\}$ はアフィン空間であることを示そう．アフィン空間の定義（= 定義 2.1.1）における条件 **[A1]** を満足することは明白である．$M' \times M''$ の任意の 2 点 $P = (P', P'')$, $Q = (Q', Q'')$ を考える．$\{M'; V'\}$, $\{M''; V''\}$ はアフィン空間であるから，$P' + \vec{u}' = Q'$, $P'' + \vec{u}'' = Q''$ であるような $\vec{u}' \in V'$, $\vec{u}'' \in V''$ がそれぞれ一意的に存在する．したがって，$P + \vec{u} = Q$, $\vec{u} \overset{\text{def}}{=} \vec{u}' + \vec{u}'' \in V$ である．また，$P + \vec{v} = Q$, $\vec{v} = (\vec{v}', \vec{v}'')$, $\vec{v}' \in V'$, $\vec{v}'' \in V''$ とすると，$P' + \vec{v}' = Q' = P' + \vec{u}'$, $P'' + \vec{v}'' = Q'' = P'' + \vec{u}''$ となる．したがって，$\vec{v} = (\vec{v}', \vec{v}'') = (\vec{u}', \vec{u}'') = \vec{u}$ である．以上により，条件 **[A2]** が満足されることがわかった．V の任意の 2 つのベ

クトル $\vec{u}=(\vec{u}',\vec{u}'')$, $\vec{v}=(\vec{v}',\vec{v}'')$, $\vec{u}',\vec{v}'\in V'$, $\vec{u}'',\vec{v}''\in V''$ を考えると，$M'\times M''$ の任意の点 $P=(P',P'')$ に対して，$(P+\vec{u})+\vec{v}=(P'+\vec{u}',P''+\vec{u}'')+\vec{v}=((P'+\vec{u}')+\vec{v}',(P''+\vec{u}'')+\vec{v}'')=(P'+(\vec{u}'+\vec{v}'),P''+(\vec{u}''+\vec{v}''))=P+(\vec{u}+\vec{v})$ である．したがって，条件 **[A3]** が満足される．かくて，$\{M'\times M'';V\}$ はアフィン空間であることが示された．(1) の後半部分が成り立つことは明白であろう．

(2) $\dim V=\dim V'+\dim V''$ であることと命題 2.1.7 によって明らかである．

命題 3.2.3 の証明： $F_{\varphi(P)}[\varXi]$ の任意の元 f に対して

$$\begin{aligned}
&\left((\varphi_*)_P\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P\right)(f)\\
&=\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_P(f\circ\varphi)=\left(\frac{\partial(f\circ\psi\circ\psi^{-1}\circ\varphi\circ\phi)}{\partial u^\mu}\right)_{\phi^{-1}(P)}\\
&=\left(\frac{\partial(\varPsi^\alpha\circ\varphi\circ\phi)}{\partial u^\mu}\right)_{\phi^{-1}(P)}\left(\frac{\partial(f\circ\psi)}{\partial v^\alpha}\right)_{\psi^{-1}(\varphi(P))}\\
&=\left(\frac{\partial\varPhi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)_P\left(\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\right)_{\varphi(P)}=\left(\frac{\partial\varPhi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)_P\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_{\varphi(P)}f
\end{aligned}\tag{A.48}$$

である．したがって命題が成り立つ．ここで $f\circ\psi$ は $D^{\mathrm{d}'}$ 上の関数であり，$\psi^{-1}\circ\varphi\circ\phi$ は D^{d} から $D^{\mathrm{d}'}$ の上への写像であることを用いた．なお，$D^{\mathrm{d}}=\phi^{-1}(S)$ の点を $(u^1,\cdots,u^{\mathrm{d}})$，$D^{\mathrm{d}'}=\psi^{-1}(T)$ の点を $(v^1,\cdots,v^{\mathrm{d}'})$ と表した．

命題 3.8.2 の証明： ω を (3.40) のように表し，ϑ を $r-$ 形式として

$$\vartheta=\frac{1}{r\,!}\vartheta_{\nu_1\cdots\nu_r}dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_r}\tag{A.49}$$

と表す．すると

$$\omega\wedge\vartheta=\frac{1}{q\,!\,r\,!}\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}\vartheta_{\nu_1\cdots\nu_r}dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_q}\wedge dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_r}\tag{A.50}$$

であるから，(3.68) により

$$d(\omega\wedge\vartheta)=\frac{1}{q\,!\,r\,!}d(\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}\vartheta_{\nu_1\cdots\nu_r})\wedge dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_q}\wedge dx^{\nu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\nu_r}\tag{A.51}$$

となる．ここで

$$d(\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}\vartheta_{\nu_1\cdots\nu_r})=(d\omega_{\mu_1\cdots\mu_q})\vartheta_{\nu_1\cdots\nu_r}+\omega_{\mu_1\cdots\mu_q}(d\vartheta_{\nu_1\cdots\nu_r})\tag{A.52}$$

と $d\vartheta_{\nu_1\cdots\nu_r}\wedge dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_q}=(-1)^q dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_q}\wedge d\vartheta_{\nu_1\cdots\nu_r}$ を用いると (3.79) が得られる．

命題 3.9.2 の証明： Σ の任意の点 P に対して $t_{\varphi(P)}$ は共変テンソルであり，また $(\varphi_*)_P : T_P(\Sigma)\to T_{\varphi(P)}(\Xi)$ は線型写像であることにより，(3.90) は容易に証明される．(3.91) を証明しよう．s,t はそれぞれ，q 階，r 階の共変テンソル場であるものとする．Σ の任意の点 P，$T_P(\Sigma)$ の $q+r$ 個の任意の元 $v_1,\cdots,v_q,v_{q+1},\cdots,v_{q+r}$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(\varphi^*(s\otimes t))_P(v_1,\cdots,v_q,v_{q+1},\cdots,v_{q+r})\\
&\quad=(s\otimes t)_Q((\varphi_*)_P v_1,\cdots,(\varphi_*)_P v_q,(\varphi_*)_P v_{q+1},\cdots,(\varphi_*)_P v_{q+r})\\
&\quad=s_Q((\varphi_*)_P v_1,\cdots,(\varphi_*)_P v_q)t_Q((\varphi_*)_P v_{q+1},\cdots,(\varphi_*)_P v_{q+r})\\
&\quad=(\varphi^* s)_P(v_1,\cdots,v_q)(\varphi^* t)_P(v_{q+1},\cdots,v_{q+r})\\
&\quad=((\varphi^* s)\otimes(\varphi^* t))_P(v_1,\cdots,v_q,v_{q+1},\cdots,v_{q+r})
\end{aligned}
\tag{A.53}
$$

であることにより，(3.91) が成り立つことがわかる．なお，ここで $Q\stackrel{\text{def}}{=}\varphi(P)$ とおいた．(3.92) は，(3.91)，交代形式の外積の定義，テンソル場のテンソル積の定義および微分形式の外積の定義から容易に示される．

(3.93) を示そう．まず，0− 形式（スカラー場）f について考える．$\varphi^* f=f\circ\varphi$ であるから Σ の任意の点 P に対して

$$
(d(\varphi^* f))_P=\left(\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\right)_Q\left(\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)_P(dx^\mu)_P \tag{A.54}
$$

が成り立つ．したがって，$T_P(\Sigma)$ の任意の元 $v=v^\nu(\partial/\partial x^\nu)_P$ に対して

$$
(d(\varphi^* f))_P(v)=\left(\frac{\partial f}{\partial y^\alpha}\right)_Q\left(\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^\mu}\right)_P v^\mu=(\varphi^* df)_P(v) \tag{A.55}
$$

である．ここで (3.20) を用いた．したがって，$d(\varphi^* f)=\varphi^* df$ である．すなわち，0− 形式については (3.93) が成り立つ．$q\geq 1$ として，Ξ 上の $q-$ 形式 ω を

$$
\omega=\frac{1}{q!}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_q}dy^{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dy^{\alpha_q} \tag{A.56}
$$

と表す．(3.90)，(3.92)，および $\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_q},y^{\alpha_1},\cdots,y^{\alpha_q}$ は局所座標系 $(y^1,\cdots,y^{\mathrm{d}})$ が定義されている曲面片上の関数であり，したがってこれらに対して (3.93) が成り立

つことを用いると,

$$\varphi^*\omega = \frac{1}{q!}\varphi^*(\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_q})d(\varphi^* y^{\alpha_1}) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^* y^{\alpha_q}) \tag{A.57}$$

が得られる. この式と (3.78), 命題 3.8.2, 3.8.3, およびスカラー場 $\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_q}, y^{\alpha_1}, \cdots, y^{\alpha_q}$ に対しては (3.93) が成り立つことにより,

$$\begin{aligned} d(\varphi^*\omega) &= \frac{1}{q!}d(\varphi^*\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_q}) \wedge d(\varphi^* y^{\alpha_1}) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^* y^{\alpha_q}) \\ &= \frac{1}{q!}\varphi^* d(\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_q}) \wedge \varphi^* dy^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge \varphi^* dy^{\alpha_q} = \varphi^* d\omega \end{aligned} \tag{A.58}$$

となる. なお, 最後の段階で (3.90) と (3.92) を用いた. かくて, Ξ 上の任意の微分形式に対して (3.93) が成り立つことがわかった. (3.94) が成り立つことは (3.21) を用いることにより容易に示される.

命題 3.10.2 の証明: (3.95) の右辺が有限確定値であることは, ω が連続であって積分領域が有界であることによって明らかである. $\mathrm{supp}(\omega)$ が別の座標近傍 (S_β, ψ_β) に関して, S_β に含まれる立方体領域 $\psi_\beta(V_\beta) = \{(u_\beta{}^1, \cdots, u_\beta{}^{\mathrm{d}}) | -b < u_\beta{}^\mu < b,\ \mu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d}\}$ にも含まれているものとする. S_β 上では, ω は $\omega = \Omega_\beta dx_\beta{}^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta{}^{\mathrm{d}}$ と表される. ただし, Ω_β は S_β 上の関数とする. このとき, (3.95) の中央の辺にある項に対応する量は

$$\int \cdots \int_{\psi_\beta(D\cap V_\beta)} (\phi_\beta{}^* \Omega_\beta) du_\beta{}^1 \cdots du_\beta{}^{\mathrm{d}} \tag{A.59}$$

である. ただし, $u_\beta{}^\mu \overset{\mathrm{def}}{=} \phi_\beta{}^* x_\beta{}^\mu$ $(\mu = 1, 2, \cdots, \mathrm{d})$ とした. しかるに, $\mathrm{supp}(\omega) \subset V_\alpha \cap V_\beta \subset S_\alpha \cap S_\beta$ であるから

$$\begin{aligned} &\int \cdots \int_{\psi_\alpha(D\cap V_\alpha)} (\phi_\alpha{}^* \Omega_\alpha) du_\alpha{}^1 \cdots du_\alpha{}^{\mathrm{d}} \\ &\qquad = \int \cdots \int_{\psi_\alpha(D\cap V_\alpha \cap V_\beta)} (\phi_\alpha{}^* \Omega_\alpha) du_\alpha{}^1 \cdots du_\alpha{}^{\mathrm{d}} \end{aligned} \tag{A.60}$$

$$\begin{aligned} &\int \cdots \int_{\psi_\beta(D\cap V_\beta)} (\phi_\beta{}^* \Omega_\beta) du_\beta{}^1 \cdots du_\beta{}^{\mathrm{d}} \\ &\qquad = \int \cdots \int_{\psi_\beta(D\cap V_\alpha \cap V_\beta)} (\phi_\beta{}^* \Omega_\beta) du_\beta{}^1 \cdots du_\beta{}^{\mathrm{d}} \end{aligned} \tag{A.61}$$

である．これら 2 式の右辺同士が等しいことを示そう．$dx_\beta{}^\mu = (\partial x_\beta{}^\mu / \partial x_\alpha{}^\nu) dx_\alpha{}^\nu$ であるから

$$\begin{aligned}\omega &= \Omega_\beta \frac{\partial x_\beta{}^1}{\partial x_\alpha{}^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x_\beta{}^{\mathrm{d}}}{\partial x_\alpha{}^{\nu_{\mathrm{d}}}} x_\alpha{}^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx_\alpha{}^{\nu_{\mathrm{d}}} \\ &= \Omega_\beta \det\left(\frac{\partial x_\beta{}^\mu}{\partial x_\alpha{}^\nu}\right) dx_\alpha{}^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha{}^{\mathrm{d}} = \Omega_\alpha dx_\alpha{}^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha{}^{\mathrm{d}}\end{aligned} \tag{A.62}$$

であり，したがって，$\Omega_\beta \det(\partial x_\beta{}^\mu / \partial x_\alpha{}^\nu) = \Omega_\alpha$ である．さらに (3.94) 式を用いると $\phi_\alpha{}^* \Omega_\alpha = (\phi_\beta{}^{-1} \circ \phi_\alpha)^* (\phi_\beta{}^* \Omega_\beta)$ が得られ，また $\phi_\alpha{}^*(\det(\partial x_\beta{}^\mu / \partial x_\alpha{}^\nu)) = \det(\partial u_\beta{}^\mu / \partial u_\alpha{}^\nu)$ であるから，

$$\begin{aligned}&\int \cdots \int_{\psi_\alpha(D \cap V_\alpha \cap V_\beta)} (\phi_\alpha{}^* \Omega_\alpha) du_\alpha{}^1 \cdots du_\alpha{}^{\mathrm{d}} \\ &\qquad = \int \cdots \int_{\psi_\alpha(D \cap V_\alpha \cap V_\beta)} F_{\beta\alpha} du_\alpha{}^1 \cdots du_\alpha{}^{\mathrm{d}}\end{aligned} \tag{A.63}$$

である．ここに $F_{\beta\alpha} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\phi_\beta{}^{-1} \circ \phi_\alpha)^* (\phi_\beta{}^* \Omega_\beta) \det(\partial u_\beta{}^\mu / \partial u_\alpha{}^\nu)$ とおいた．一方，微分積分学における積分変数の変換の公式により，

$$\begin{aligned}&\int \cdots \int_{\psi_\beta(D \cap V_\alpha \cap V_\beta)} (\phi_\beta{}^* \Omega_\beta) du_\beta{}^1 \cdots du_\beta{}^{\mathrm{d}} \\ &\qquad = \int \cdots \int_{\psi_\alpha(D \cap V_\alpha \cap V_\beta)} G_{\beta\alpha} du_\alpha{}^1 \cdots du_\alpha{}^{\mathrm{d}}\end{aligned} \tag{A.64}$$

である．ここに $G_{\beta\alpha} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\phi_\beta{}^{-1} \circ \phi_\alpha)^* (\phi_\beta{}^* \Omega_\beta) |\det(\partial u_\beta{}^\mu / \partial u_\alpha{}^\nu)|$ とおいた．ところで $\{(S_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ は正の座標近傍系であるから，(3.53) が成り立つ．したがって，$\psi_\alpha(S_\alpha \bigcap S_\beta)$ 上で $\det(\partial u_\beta{}^\mu / \partial u_\alpha{}^\nu) > 0$ である．ゆえに $F_{\beta\alpha} = G_{\beta\alpha}$ であり，(A.63) の右辺と (A.64) の右辺とは等しく，したがってまた (A.60) の右辺と (A.61) の右辺も等しい．かくて，命題が成り立つことがわかった．

命題 3.10.3 の証明：(3.96) の右辺が有限確定値であることは，それが有限確定値の有限個の和であることによって明らかである．Σ の別の立方体領域の族 $\{W_\beta\}_{\beta \in B}$ による被覆を考える．このうちの有限個から成るある族 $\{W_{\beta_1}, \cdots, W_{\beta_l}\}$ $(\beta_j \in B,\ j = 1, 2, \cdots, l)$ に対して，$D \subset \bigcup_{j=1}^{l} W_{\beta_j}$ である．$\{W_\beta\}_{\beta \in B}$ に従属する 1 の

分割を $\{g_\beta | \beta \in B\}$ とする．D 上では $\omega_{\alpha_i} = f_{\alpha_i}\omega = \sum_{j=1}^{l} g_{\beta_j} f_{\alpha_i}\omega$ であるから

$$\int_D \omega_{\alpha_i} = \int_D f_{\alpha_i}\omega = \sum_{j=1}^{l}\int_D g_{\beta_j} f_{\alpha_i}\omega \tag{A.65}$$

であり，したがって

$$\sum_{i=1}^{m}\int_D \omega_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}\int_D g_{\beta_j} f_{\alpha_i}\omega \tag{A.66}$$

となる．同様に

$$\sum_{j=1}^{l}\int_D \omega_{\beta_j} = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{m}\int_D f_{\alpha_i} g_{\beta_j}\omega \tag{A.67}$$

である．i, j についての 2 重和の順序は交換可能であるから，(A.66) と (A.67) の右辺同士は等しい．したがって

$$\sum_{i=1}^{m}\int_D \omega_{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{l}\int_D \omega_{\beta_j} \tag{A.68}$$

となり，命題が成り立つことがわかる．

付 録B　数学ノート

B.1　集合，写像，2 項関係

B.1.1　論理記号

$P \Longrightarrow Q$ は「P ならば Q である」を意味する．

$P \Longleftrightarrow Q$ は「P と Q とは同等である」を意味する．

$A \stackrel{\mathrm{def}}{=} B$ は「B のことを A と定義する」を意味する．

$\exists$ は「存在する」を意味する．

$\forall$ は「すべての」または「任意の」を意味する．

B.1.2　集合

集合とは "ものの集まり" のことである．ただし，あるものがその集合に属しているか否かがはっきりと定まっていなければならない．したがって,「素数全体の集合」は意味をもつが，例えば,「大きな整数全体の集合」というのは意味をなさない．「大きな整数」ということについての明確な基準が存在しないからである．

「集合を構成しているもの」のことを，その集合の元とよび，a が集合 X の元であることを $a \in X$ と表し，a が集合 X の元でないことを $a \notin X$ と表す．集合はその元の数が有限であるか否かに応じて，それぞれ**有限集合**，**無限集合**という．元を 1 つももたない集合を**空集合**といい，$\emptyset$ と表す．

2 つの集合 X と Y について，$a \in X$ ならば $a \in Y$ であるとき，$X \subset Y$ あるいは $Y \supset X$ と記し，X は Y の**部分集合**であるという．$X \subset Y$ かつ $Y \subset X$ であるとき，$X = Y$ と記し，X と Y とは等しいという．$X = Y$ でないことを $X \neq Y$

と表し，X と Y とは等しくないという．$X \subset Y$ かつ $X \neq Y$ であるとき $X \subsetneqq Y$ あるいは $Y \supsetneqq X$ と記し，X は Y の**真の部分集合**であるという．

集合を表すのには，その元を中括弧 $\{\ \}$ 内に並べて，例えば，$X = \{-1, 0, 1\}$ としたり，あるいは $X = \{a | a \in I,\ a^2 \leq 1\}$ というように，対象が，その集合に属しているか否かを規定する条件を述べることによって表したりする．ここに，I は整数全体の集合を表す．$\{a | a \in I,\ a^2 \leq 1\}$ のことを，簡略化して，$\{a \in I |\ a^2 \leq 1\}$ と書くこともある．なお，元を括弧内に並べて，例えば，$X = \{-1, 0, 1\}$ と書く場合，括弧内での元の並び順には意味をもたせない．また，同一の元を重複して書くことは禁止されてはいないが，同一の元をいくつ書いてもその効果は 1 つだけ書いた場合と同じである．例えば，$\{-1, -1, 0, 1\} = \{-1, 0, 1\}$ である．

考察の対象となっている集合がすべてある 1 つの定まった集合 S の部分集合である場合，その集合 S のことを**全体集合**という．

次の約束をする：

約束：空集合 $\emptyset$ は任意の集合の部分集合である．

空集合は一意的である．

$X = \{x | x \in C\}$ と書いたときの，x を**変数**，C をその**変域**という．変数といっても考察の対象となるものを表す文字のことであり，これは数とは限らない．

定義 B.1. S を集合とし，その部分集合全体の集合を $\mathfrak{P}(S)$ と表し，S の**巾集合**という．$\mathfrak{P}(S)$ の元は S の部分集合である．X, Y を $\mathfrak{P}(S)$ の元として

$$X \bigcup Y \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in X \text{ または } a \in Y\} \tag{B.1}$$

$$X \bigcap Y \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in X \text{ かつ } a \in Y\} \tag{B.2}$$

$$X^c \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in S | a \notin X\} \tag{B.3}$$

により $X \bigcup Y$, $X \bigcap Y$, X^c を定義して，それぞれを X と Y の**和集合**，X と Y の**積集合**，S における X の**補集合**という．

集合 Λ の各元 λ に対応して巾集合 $\mathfrak{P}(S)$ の元 X_λ が一意的に定まっているとき，これらの集合の全体を $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ と記し，これを Λ によって添数づけられた**集合の族**とよぶ．このとき，集合 Λ のことを**添数集合**，Λ の元のことを**添数**という．

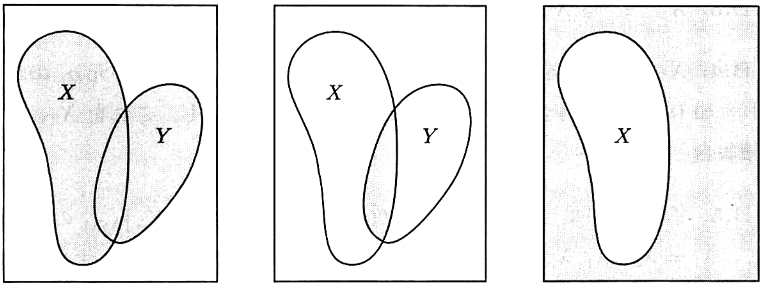


図 **B.1**　和集合，積集合，補集合

定義 B.2. 集合 $\varLambda$ によって添数づけられた，$\mathfrak{P}(S)$ の元の族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ について

$$\bigcup_{\lambda\in\varLambda} X_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in X_\lambda,\ \exists\lambda \in \varLambda\},\quad \bigcap_{\lambda\in\varLambda} X_\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \{a | a \in X_\lambda,\ \forall\lambda \in \varLambda\} \tag{B.4}$$

によって族 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ の和集合 $\bigcup_{\lambda\in\varLambda} X_\lambda$ と積集合 $\bigcap_{\lambda\in\varLambda} X_\lambda$ を定義する．

命題 B.1. 和集合，積集合および補集合の演算について，以下のことが成り立つ：

(1)　$X \cup X = X,\quad X \cap X = X$

(2)　$X \cup Y = Y \cup X,\quad X \cap Y = Y \cap X$

(3)　$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z,\quad X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$

(4)　$X \subset Y \Longleftrightarrow X \cup Y = Y \Longleftrightarrow X \cap Y = X$

(5)　$X \cup \emptyset = X,\quad X \cap \emptyset = \emptyset$

(6)　$X \cup X^c = S,\quad X \cap X^c = \emptyset$

(7)　$(X^c)^c = X$

(8)　$\emptyset^c = S,\quad S^c = \emptyset$

(9)　$X \subset Y \Longleftrightarrow X^c \supset Y^c$

(10)　$(\bigcup_{\lambda\in\varLambda} X_\lambda)^c = \bigcap_{\lambda\in\varLambda} (X_\lambda)^c,\quad (\bigcap_{\lambda\in\varLambda} X_\lambda)^c = \bigcup_{\lambda\in\varLambda} (X_\lambda)^c$
(de Morgan の法則)．

(11)　$(\bigcup_{\lambda\in\varLambda} X_\lambda) \cap Y = \bigcup_{\lambda\in\varLambda} (X_\lambda \cap Y)$
$(\bigcap_{\lambda\in\varLambda} X_\lambda) \cup Y = \bigcap_{\lambda\in\varLambda} (X_\lambda \cup Y)$

ただし，S を全体集合とし，X, Y, Z はすべて $\mathfrak{P}(S)$ の元として，$\{X_\lambda\}_{\lambda\in\varLambda}$ は集合 $\varLambda$ によって添数づけられた $\mathfrak{P}(S)$ の元の族とする．

定義 B.3. $X - Y \stackrel{\text{def}}{=} X \cap Y^c$ により，X から Y を引いた**差集合**を定義する．

定義 B.4. $X_1, \cdots, X_n$ を集合とするとき，X_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の元 a_i の順序づけられた組 $(a_1, \cdots, a_n)$ 全体の集合を $X_1 \times \cdots \times X_n$ と表し，これを $X_1, \cdots, X_n$ の**直積集合**という[1]．

定義 B.5. 集合 X が集合 Λ によって添数づけられた集合族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合であって，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda)$ ならば $X_{\lambda_1} \cap X_{\lambda_2} = \emptyset$ であるものとする．このとき，X は X_λ $(\lambda \in \Lambda)$ の**直和**であるという．

B.1.3 写像

X, Y を 2 つの集合として，ある規則 f によって X の任意の元 a に対して Y の元 $f(a)$ が一意的に定められているとき，f を X から Y への**写像**という．このとき X を f の**定義域**といい，$\mathfrak{D}(f)$ と表す．また，集合 $f(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(a) | a \in X\}$ を f の**値域**といい，$\mathfrak{R}(f)$ と表す．集合 X から集合 Y への写像 f を表すのに，写像 $f : X \to Y$ と書くこともある．

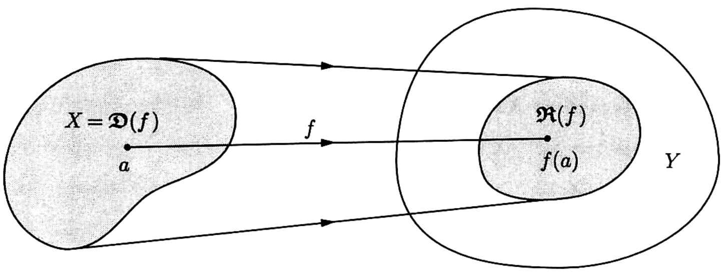


図 **B.2** 写像の定義域，値域

X の部分集合 A について，集合 $f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{f(a) | a \in A\}$ を A の f による**像**とい

[1] $(a_1, \cdots, a_n)$ において，括弧内の $a_1, \cdots, a_n$ の並び順は意味あるものとする．したがって，$(a_1, \cdots, a_n) = (b_1, \cdots, b_n) \iff a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ であり，また $X_1 \times \cdots \times X_n = Y_1 \times \cdots \times Y_n \iff X_i = Y_i$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ である．

う．値域 $\mathfrak{R}(f) = f(X)$ は，定義域 $\mathfrak{D}(f) = X$ の f による像である．

Y の部分集合 B について，集合 $f^{-1}(B) \overset{\text{def}}{=} \{a \in X | f(a) \in B\}$ を f による B の**原像**という．

$f(a) = g(a), \forall a \in X$ は「X のすべての元 a に対して $f(a) = g(a)$ である」を意味する．また $f(a) = g(a), \exists a \in X$ は「$f(a) = g(a)$ であるような X の元 a が存在する」を意味する．

2 つの写像 f, g について $\mathfrak{D}(f) = \mathfrak{D}(g)$ であり，かつ $f(a) = g(a), \forall a \in \mathfrak{D}(f)$ であるとき，$f = g$ と書き，f と g とは等しいという．写像 $f : X \to Y$ において，その定義域を X の部分集合 Z に限定して得られる写像を $f|_Z$ と表し，これを f の Z への**制限**という．$(f|_Z)(a) = f(a), \forall a \in Z$ である．

命題 B.2. 写像 $f : S \to T$ による像および原像について，以下のことが成り立つ：

(1)　$X_1 \subset X_2 \Longrightarrow f(X_1) \subset f(X_2)$

(2)　$f\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f(X_\lambda)$

(3)　$f\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f(X_\lambda)$

(4)　$f(S - X) \supset f(S) - f(X)$

(5)　$Y_1 \subset Y_2 \Longrightarrow f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$

(6)　$f^{-1}\left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma} Y_\sigma\right) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma} f^{-1}(Y_\sigma)$

(7)　$f^{-1}\left(\bigcap_{\sigma \in \Sigma} Y_\sigma\right) = \bigcap_{\sigma \in \Sigma} f^{-1}(Y_\sigma)$

(8)　$f^{-1}(T - Y) = S - f^{-1}(Y)$

(9)　$f^{-1}(f(X)) \supset X, \quad f(f^{-1}(Y)) \subset Y$

ただし，X, X_1, X_2 は $\mathfrak{P}(S)$ の元，Y, Y_1, Y_2 は $\mathfrak{P}(T)$ の元とし，$\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を集合 Λ によって添数づけられた $\mathfrak{P}(S)$ の族，$\{Y_\sigma\}_{\sigma \in \Sigma}$ を集合 Σ によって添数づけられた $\mathfrak{P}(T)$ の族とする．

定義 B.6. X を集合とする．

$$I_X(a) \overset{\text{def}}{=} a, \ \forall a \in X \tag{B.5}$$

で定義される写像 $I_X : X \to X$ を X における**恒等写像**（あるいは**恒等変換**）という．

混乱が起こるおそれがない場合には，I_X のことを単に I と記すこともある．本書の本文中では，この略記法や小文字 i 等を用いる．

定義 B.7. X を集合 Y の部分集合とする．

$$\imath(a) \overset{\mathrm{def}}{=} a, \quad \forall a \in X \tag{B.6}$$

で定義される写像 $\imath : X \to Y$ を X から Y への**包含写像**という．

X, Y を集合とする．写像 $f : X \to Y$ において $f(a_1) = f(a_2)$，$a_1, a_2 \in X$ ならば $a_1 = a_2$ であるとき，写像 f は**単写**である，または X から Y への **1 対 1 の写像**であるという．写像 $f : X \to Y$ において，$f(X) = Y$ であるとき f は X から Y への**全写**である，あるいは f は X から Y の**上への写像**であるという．写像 $f : X \to Y$ が単写でありかつ全写であるとき，f は X から Y への**全単写**である，あるいは f は X から Y の**上への 1 対 1 の写像**であるという．

写像 $f : X \to Y$ が X から Y への全単写であるとき，Y の任意に与えられた元 b に対して $b = f(a)$ なる X の元 a が一意的に存在する．このとき，

$$f^{-1}(b) = (f^{-1})(f(a)) \overset{\mathrm{def}}{=} a, \quad \forall b \in Y \tag{B.7}$$

によって定義される Y から X への写像 f^{-1} を f の**逆写像**という[2)]．

定義 B.8. X, Y, Z を集合とする．写像 $f : X \to Y$ と写像 $g : Y \to Z$ が与えられたとき，

$$(g \circ f)(a) \overset{\mathrm{def}}{=} g(f(a)), \quad \forall a \in X \tag{B.8}$$

で定義される写像 $g \circ f : X \to Z$ を f と g との**積写像**（あるいは**積**）という．

写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ が共に全写であるならば，積写像 $g \circ f : X \to Z$ も全写である．また f, g が共に単写であるならば，$g \circ f$ も単写である．

命題 B.3. 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to W$ が与えられたとき，**結合律**

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \tag{B.9}$$

が成り立つ．

---

2) 逆写像 f^{-1} が存在するとき，$\mathfrak{P}(Y)$ の任意の元 B に対して，集合 $\{f^{-1}(b) | b \in B\}$ は f による B の原像 $f^{-1}(B)$ と一致する．

写像 $f : X \to X$ と恒等写像 $I_X : X \to X$ について

$$f \circ I_X = f = I_X \circ f \tag{B.10}$$

が成り立つ．また，写像 $f : X \to Y$ が全単写であるとき

$$f^{-1} \circ f = I_X,\ \ f \circ f^{-1} = I_Y \tag{B.11}$$

である．

B.1.4　2 項関係，2 項演算

2 つの集合 S, T について，その直積集合 $S \times T$ を変域とする変数 (s, t) が条件 R を満足しているか否かが規定されているとき，この条件を s, t の間の **2 項関係**といい，$R(s, t)$ と書く．とくに，$S = T$ である場合の 2 項関係を S における 2 項関係という．

2 項関係 $R(s, t)$ において，変数 s, t が，それぞれ特定の値 $s = a, t = b$ である場合の $R(a, b)$ を aRb と記す．(a, b) が条件 R を満足していないとき $a\not{R}b$ と記す．

定義 B.9. 集合 S における 2 項関係 $\sim$ が下記の条件 **[E1]**，**[E2]**，**[E3]** のすべてを満足するとき，$\sim$ は**同値関係**であるといい，元 a, b に対して $a \sim b$ が成り立つとき，b は a に**同値**であるという：

[E1]　S の任意の元 a に対して $a \sim a$ である．

[E2]　$a \sim b$ であるならば $b \sim a$ である．

[E3]　$a \sim b, b \sim c$ であるならば $a \sim c$ である．

同値関係の定義された集合において，元 a に同値な元全体の集合を a の**同値類**といい，$C(a)$ と記す．S の同値関係 $\sim$ による同値類全体の集合を S の $\sim$ による**商集合**といい，$S/\sim$ と表す．同値類について以下のことが成り立つ：
[e1] a は $C(a)$ の元である：$a \in C(a)$．[e2] $a \sim b$ であるとき，かつそのときに限って $C(a) = C(b)$ である．[e3] S の任意の 2 元 a, b について，$C(a) = C(b)$ であるか $C(a) \bigcap C(b) = \emptyset$ であるかのいずれかである．

集合 S における部分集合の系 $\mathfrak{P}$ について，次の条件 **[P1]**，**[P2]** が共に満足されているとき，$\mathfrak{P}$ は S の**分割**であるという：**[P1]** $\bigcup \mathfrak{P} = S$ である．**[P2]** $\mathfrak{P}$ の

相異なる任意の 2 元 P_1, P_2 について $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ である．ただし，$\bigcup \mathfrak{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in S | a \in P, \exists P \in \mathfrak{P}\}$ とする．

$\sim$ を集合 S における同値関係とすると，商集合 $S/\sim$ は S の分割である．

定義 B.10. 集合 S における 2 項関係 $\prec$ が以下の条件 **[O1]**〜**[O3]** のすべてを満足するとき，$\prec$ は**半順序関係**であるといい，$\{S; \prec\}$ を**半順序集合**という：

[O1]　$a \prec a$ である．

[O2]　$a \prec b, b \prec a$ であるならば $a = b$ である．

[O3]　$a \prec b, b \prec c$ であるならば $a \prec c$ である．

半順序集合 $\{S; \prec\}$ において，その任意の 2 元 a, b について $a \prec b$ か $b \prec a$ のいずれかが成り立つとき，関係 $\prec$ は**全順序関係**であるといい，$\{S; \prec\}$ は**全順序集合**であるという．

X, Y を集合とする．写像 $\tau : X \times X \to Y$ を X 上で定義された **2 項演算**という．τ の値域 $\mathfrak{R}(\tau)$ が X の部分集合であるとき，この演算 τ は X において**閉じている**という．

$X \times X$ の元 (a, b) の τ による像，$\tau(a, b)$ を $a \odot b$ と表したとき，$\odot$ を**積の演算**という．演算 $\odot$ が

$$a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c, \ \ \forall a, b, c \in X \tag{B.12}$$

を満足するとき，演算 $\odot$ は**結合律**を満足するという．

B.2　群，剰余類，体

B.2.1　群，剰余類

定義 B.11. 集合 G の任意の元 g, h に対して積 $g \odot h$ が一意的に定義されていて，以下の条件 **[G0]**〜**[G3]** がすべて満足されているとき，系 $\mathcal{G} \stackrel{\text{def}}{=} \{G; \odot\}$ を**群**という：

[G0]　$\odot$ は G において閉じている：G の任意の元 f, g について $f \odot g \in G$ である．

[G1] $\odot$ は結合律を満足する： G の任意の元 f, g, h について $f \odot (g \odot h) = (f \odot g) \odot h$ が成り立つ．

[G2] **単位元** e が存在する： G の任意の元 g に対して $g \odot e = g = e \odot g$ が成り立つ．

[G3] G の各元 g に対して，**逆元** g^{-1} が存在する： $g \odot g^{-1} = e = g^{-1} \odot g$ を満足する $g^{-1} \in G$ が存在する．

群 $\mathcal{G}$ において次の条件 [G4] が満足されるとき，群 $\mathcal{G}$ は**可換群**であるという：

[G4] 演算 $\odot$ は**可換**である： G の任意の元 g, h に対して $g \odot h = h \odot g$ が成り立つ．

可換群および可換でない群のことを，それぞれ **Abel 群**，**非 Abel 群**ということもある．

1 つの群において，単位元および各元の逆元は，共に一意的である．また，任意の元 $g \in G$ について $(g^{-1})^{-1} = g$ である．

群 $\mathcal{G}$ において，H を G の部分集合とする．系 $\mathcal{H} \overset{\text{def}}{=} \{H; \odot\}$ が群であるとき，$\mathcal{H}$ は群 $\mathcal{G}$ の**部分群**であるという．

命題 B.4. $\{H; \odot\}$ が群 $\mathcal{G}$ の部分群であるための必要十分条件は，H の任意の元 a, b に対して $a^{-1} \odot b \in H$ であることである．

群の例：実数全体の集合を R として，そこにおける加法および積の演算をそれぞれ $+, \times$ と表すと，$\{R; +\}$, $\{R - \{0\}; \times\}$ は共に可換群である．ここに $R - \{0\}$ は実数全体の集合から 0 を除いた集合を表す．$\{R; +\}$ の単位元は実数 0，$\{R - \{0\}; \times\}$ の単位元は 1 である．整数全体の集合，正の実数全体の集合を，それぞれ I および R_+ と表すと，$\{I; +\}$, $\{R_+; \times\}$ は，それぞれ $\{R; +\}$, $\{R - \{0\}; \times\}$ の部分群である．なお，$\{R_+; \times\}$ は $\{R; +\}$ の部分群ではない．

$\mathcal{G} = \{G; \odot\}$, $\mathcal{G}' = \{G'; \odot'\}$ を共に群とする．写像 $\varphi : G \to G'$ が

条件： $\varphi(g_1 \odot g_2) = \varphi(g_1) \odot' \varphi(g_2), \forall g_1, g_2 \in G$

を満足するとき，φ を $\mathcal{G}$ から $\mathcal{G}'$ への**準同型写像**という．準同型写像 φ が単写であるとき，φ は**同型写像**であるという．値域が G' である準同型写像 $\varphi : G \to G'$

が存在するとき，群 $\mathcal{G}$ は群 $\mathcal{G}'$ に**準同型**であるという．値域が G' である同型写像 $\varphi : G \to G'$ が存在するとき，群 $\mathcal{G}$ は群 $\mathcal{G}'$ に**同型**であるという．

$\mathcal{H} = \{H; \odot\}$ を群 $\mathcal{G} = \{G; \odot\}$ の部分群とする．G の 2 元 a, b に対して $a^{-1} \odot b \in H$ であるときかつそのときに限って $a \fallingdotseq b$ とし，また $b \odot a^{-1} \in H$ であるときかつそのときに限って $a \risingdotseq b$ とする．$a \fallingdotseq b$, $a \risingdotseq b$ は共に同値関係である．$a \in G$ を含む同値類 $\{b | b \fallingdotseq a, b \in G\}$, $\{b | b \risingdotseq a, b \in G\}$ を, それぞれ $\mathcal{G}$ の $\mathcal{H}$ に関する a を含む**左剰余類**，**右剰余類**という．$\mathcal{H}$ に関する左（右）剰余類全体の集合を考え，$\mathcal{H}$ の各左（右）剰余類から 1 つずつ元を選んでつくった集合を $\mathcal{H}$ の左（右）剰余類の**代表系**という．商集合 $G/\fallingdotseq$ および $G/\risingdotseq$ は共に G の分割である．a を含む $\mathcal{H}$ の左剰余類，右剰余類は，それぞれ $aH \overset{\text{def}}{=} \{a \odot b | b \in H\}$, $Ha \overset{\text{def}}{=} \{b \odot a | b \in H\}$ と表される．S を $\mathcal{H}$ の左剰余類の代表系，T を右剰余類の代表系とすると

$$G/\fallingdotseq = \bigcup_{s \in S} sH,\ \ (sH) \cap (s'H) = \emptyset,\ s \neq s',\ s, s' \in S \tag{B.13}$$

$$G/\risingdotseq = \bigcup_{t \in T} Ht,\ \ (Ht) \cap (Ht') = \emptyset,\ t \neq t',\ t, t' \in T \tag{B.14}$$

である．

(B.13)，(B.14) の内容を，それぞれ「G は**左剰余類の直和**，**右剰余類の直和**に分解される」といい，それぞれを $G = \oplus_{a \in S} aH$, $G = \oplus_{a \in T} Ha$ と書くこともある．

B.2.2　体

定義 B.12. 集合 F において，F の任意の 2 元 a, b に対して，和 $a \oplus b \in F$，積 $a \odot b \in F$ が共に一意的に定義されていて，以下の条件 **[F1]**～**F3]** がすべて満足されているとき，系 $\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{F; \oplus, \odot\}$ のことを**体**という：

[F1]　系 $\{F; \oplus\}$ は可換群である．その単位元を o と表す.

[F2]　集合 F から元 o を除いた集合を $F - \{o\}$ と表すと，系 $\{F - \{o\}; \odot\}$ は可換群である．

[F3]　分配律が成り立つ．すなわち F の任意の 3 元 a, b, c について $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ が成り立つ．

体 $\mathcal{F}$ において，F の元 a の，和 $\oplus$ に関する逆元を $-a$ と表す.

R を実数全体の集合とし，その加法と乗法の演算を，それぞれ $+, \times$ と表すと系 $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{R; +, \times\}$ は体である．この体のことを**実数体**という．同様に複素数体を考えることができる．

B.3　置換，置換群

p を自然数として，p 個の相異なるものを数字 $1, 2, \cdots, p$ で表す．$(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ を p 個の文字列 $(1, 2, \cdots, p)$ の 1 つの並べ換えとして，$(1, 2, \cdots, p)$ を $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ に並べ換える操作を

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \tag{B.15}$$

と表す．このような「入れ換え」の操作を**置換**という．置換を σ, ρ, σ_1, σ_2, $\cdots$ 等の文字で表すこともある．(B.15) を σ で表すと，数字 i $(i = 1, 2, \cdots, p)$ の σ による像 $\sigma(i)$ は a_i である．なお，(B.15) においては，i の下にその像 a_i が書いてあることが重要なのであって，1 行目に $1, 2, \cdots, p$ がこの順に並んでいる必要はない．例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & p \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & \cdots & p \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \tag{B.16}$$

である．

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ 1 & 2 & \cdots & p \end{pmatrix} \tag{B.17}$$

は，恒等変換である．σ と

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{pmatrix} \tag{B.18}$$

との積 $\rho \circ \sigma$ は

$$\rho \circ \sigma \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{pmatrix} \tag{B.19}$$

で定義される．p 個の文字 $1, 2, \cdots, p$ の置換全体の集合を $\mathfrak{S}_p$ と書く．$\mathfrak{S}_p$ の元のうち

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & p \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & p \end{pmatrix} \tag{B.20}$$

のように 2 つの文字の入れ換えの操作であるものを**互換**という．$\mathfrak{S}_p$ の任意の元 σ は互換の積として表される．σ を互換の積として表す「表し方」は一意的ではないが,「互換の積の因子として現れる互換の数（かず）が偶数個であるか奇数個であるか」ということは一意的である．置換 σ を互換の積として表したとき，その因子として表れる互換の数が偶数個であるか奇数個であるかに応じて，σ は**偶置換**あるいは**奇置換**であるという．

系 $\{\mathfrak{S}_p; \circ\}$ は群である．この群のことを**置換群**という．

B.4 位相空間

B.4.1 位相空間，部分位相空間

定義 B.13. M を集合とする．M の各元 x に対して，M のある部分集合 $U(x)$ の族 $\{U(x)\}$ が次の 3 つの条件をすべて満足するように与えられているものとする：

[t1] この族に属するどの部分集合 $U(x)$ も元 x を含む．

[t2] 族 $\{U(x)\}$ に属する任意の 2 つの部分集合 $U_1(x)$, $U_2(x)$ に対して，$\{U(x)\}$ に属する部分集合 $U_3(x)$ であって $U_3(x) \subset U_1(x) \bigcap U_2(x)$ であるようなものが存在する．

[t3] $y \in U(x)$ である任意の y に対して，$U(y) \subset U(x)$ であるような $U(y) \in \{U(y)\}$ が存在する．

このとき，$\{U(x)\}$ を x の**基本近傍系**，$U(x)$ を x の**基本近傍**といい，M には**近傍系** $\mathfrak{U} \overset{\text{def}}{=} \{\{U(x)\} | x \in M\}$ が与えられたという．また，M と近傍系 $\mathfrak{U}$ の組 $\{M; \mathfrak{U}\}$ を $\mathfrak{U}$ によって**位相**が与えられた**位相空間**であるという[3]．位相空間 $\{M; \mathfrak{U}\}$ において，M の元のことを**点**という．位相空間 $\{M; \mathfrak{U}\}$ がさらに次の条件：

[3] "開集合族" を与えることによる位相空間の定義もあるが，これは上の定義と内容的に同等である．

[H] M の任意の異なる 2 点 x, y について，$U(x) \cap U(y) = \emptyset$ であるような $U(x)$, $U(y)$ が存在する．

を満足するとき，$\{M; \mathfrak{U}\}$ を **Hausdorff 空間**という．

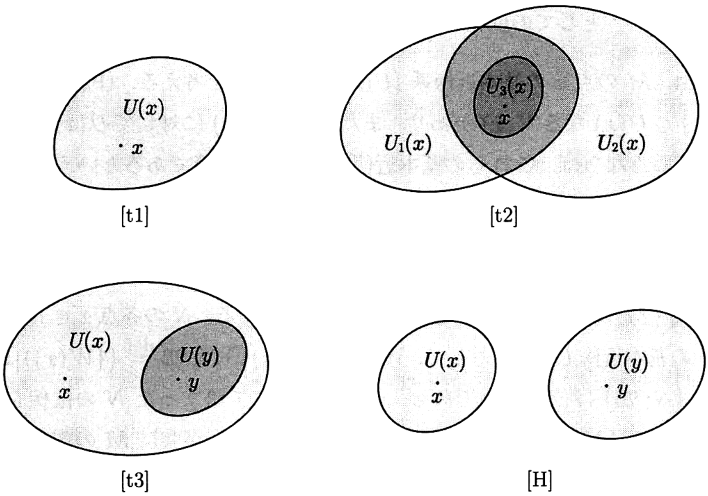


図 **B.3** 条件 [t1]～[t3]，[H]

集合 M が与えられても，M の元の数が 2 以上であるならば，これに対する近傍系の定め方は一意的ではない．与えられた集合 M の近傍系を指定することを M に**位相を入れる**という．なお，近傍系 $\mathfrak{U}$ を明示する必要のない場合には，位相空間 $\{M; \mathfrak{U}\}$ のことを，単に M で表すことも多い．

Hausdorff 空間の例：実数ベクトル空間 $\mathcal{R}^n = \{R^n, R; \oplus, \odot, +, \cdot\}$ において，R^n の元 $\vec{a} = (a^1, \cdots, a^n)$ に対し $\|\vec{a}\| \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Max}_{i=1,2,\cdots,n}|a^i|$ とおき，R^n の 2 点 $\vec{a}, \vec{b}$ に対して $d(\vec{a}, \vec{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \|\vec{a} - \vec{b}\|$ とする．$\delta > 0$ として，$U(\vec{a}; \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \{\vec{b} \in R^n | d(\vec{a}, \vec{b}) < \delta\}$ とおいて，$\{U(\vec{a})\} \stackrel{\text{def}}{=} \{U(\vec{a}; \delta) | \delta \in R_+\}$, $\mathfrak{U} \stackrel{\text{def}}{=} \{U(\vec{a}) | \vec{a} \in R^n\}$ とする．なお，R_+ は正の実数全体の集合を表す．このとき，$\{R^n; \mathfrak{U}\}$ は Hausdorff 空間である．$U(\vec{a}; \delta)$, $\{U(\vec{a})\}$ は，それぞれ $\vec{a}$ の基本近傍および基本近傍系であり，$\mathfrak{U}$ が近傍系である．

以下においては，R^n は Hausdorff 空間 $\{R^n; \mathfrak{U}\}$ を構成しているものと理解する．

また，R^n の元を表すにも，ベクトルを表す矢印を省いて a というように書くことにする．

実数を要素とする m 行 n 列の行列全体の集合を $M(m,n)$ とすると，$\mathcal{M}(m,n) \stackrel{\text{def}}{=} \{M(m,n), R; \oplus, \odot, +, \cdot\}$ は mn 次元の数ベクトル空間である．したがって，この空間にも $\mathcal{R}^{mn}$ としての位相を入れることができる．

定義 B.14. M の点 x の基本近傍系 $\{U(x)\}$, $\{V(x)\}$ を考える．任意の $U(x)$ に対して $V(x) \subset U(x)$ なる $V(x)$ があり，また任意の $V(x)$ に対して $U(x) \subset V(x)$ なる $U(x)$ があるならば，これらの基本近傍系は互いに**同値**であるという．各点 x について同様なことが成り立っていれば，$\mathfrak{U} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{U(x)\}|x \in M\}$ によって与えられる位相と $\mathfrak{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{V(x)\}|x \in M\}$ によって与えられる**位相は同値**であるという．

位相空間 $\{M; \mathfrak{U}\}$ において N を M の部分集合とする．N の各点 $x \in N$ と M における x の基本近傍 $U(x)$ に対して，$W(x) \stackrel{\text{def}}{=} U(x) \bigcap N, \mathfrak{W} \stackrel{\text{def}}{=} \{\{W(x)\}|x \in N\}$ とすると $\{N; \mathfrak{W}\}$ は位相空間である．上のようにして決まった N の位相を**相対位相**，$\{N; \mathfrak{W}\}$ を $\{M; \mathfrak{U}\}$ の**部分位相空間**という．N_1, N_2 が共に M の部分位相空間であり，かつ $N_1 \subset N_2$ であるならば，N_1 は N_2 の部分位相空間である．

命題 B.5. $\{M; \mathfrak{U}\}$ が Hausdorff 空間ならば，その任意の部分位相空間 $\{N; \mathfrak{W}\}$ も Hausdorff 空間である．

B.4.2　開集合，閉集合，可算公理

定義 B.15. X を位相空間 M の部分集合とする．

(a)　X の点 x について，$U(x) \subset X$ を満たす基本近傍 $U(x)$ がある場合には x を X の**内点**という．

(b)　$X^c = M - X$ の点 x について，$U(x) \subset X^c$ である基本近傍 $U(x)$ がある場合には x を X の**外点**という．

(c)　M の点 x について，x のどのような基本近傍 $U(x)$ をとっても $U(x) \subset X$ にも $U(x) \subset X^c$ にもならない場合には，x を X の**境界点**という．

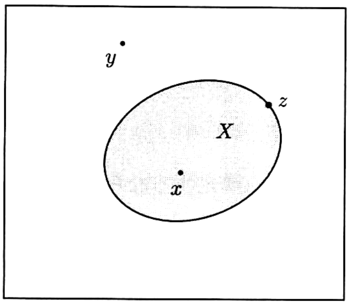
(d)　X の点がすべて X の内点である場合，X を**開集合**という．

(e)　X^c の点がすべて X の外点である場合，X を**閉集合**という．

(f) X の内点全体の集合を X の**内部**といい，X° と表す.

(g) X の内部と境界点の集合の和集合を X の**閉包**といい，$\overline{X}$ と表す.

(1) M の任意の点は与えられた部分集合 X の内点，外点，境界点のいずれかである.(2) X の内点は X^c の外点，X の外点は X^c の内点である.(3) X の境界点は X^c の境界点でもある.(4) X が開（閉）集合ならば，$X^c = M - X$ は閉（開）集合である.(5) 位相空間 M において，$M, \emptyset$ は共に開集合でもあり閉集合でもある.



x：内点，　y：外点，　z：境界点

図 **B.4**　内点，外点，境界点

命題 B.6. 位相空間 M の部分集合に関して以下のことが成り立つ：(1) O_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ がすべて開集合ならば，$\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ は開集合である.(2) O_λ $(\lambda \in \Lambda)$ がすべて開集合ならば，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ は開集合である.(3) A_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ がすべて閉集合ならば，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ は閉集合である.(4) A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ がすべて閉集合ならば，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は閉集合である.

ここに，Λ は有限集合とは限らない添数集合を表す.

命題 B.7. X, Y を位相空間 M の部分集合とすると，次のことが成り立つ：

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\emptyset} = \emptyset, \quad X \subset \overline{X}, \quad \overline{\overline{X}} = \overline{X}, \quad X \subset Y \Longrightarrow \overline{X} \subset \overline{Y} \\ \overline{X^c} = (X^{\circ})^c, \quad (\overline{X^c})^c = X^{\circ}, \quad (X^c)^{\circ} = (\overline{X})^c \end{array}\right\} \tag{B.21}$$

M の部分集合 X が閉集合であることと $X = \overline{X}$ であることとは同値である.

X の内部は X に含まれる最大の開集合である．また $\overline{X}$ は X を含む最小の閉集合である．

x を含む開集合を x の**近傍**という．x の基本近傍は x の近傍である．位相空間 M において，開集合の族 $\mathcal{W} = \{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ であって M の任意の開集合 O が $\mathcal{W}$ に属する開集合の和集合として $O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} W_\lambda$ と表されるとき，$\mathcal{W}$ は位相空間 M の**基**であるという．ここに，Λ' は添数集合 Λ の部分集合とする．M の各点 x について高々可算個の基本近傍から成る基本近傍系があるとき，M は**第 1 可算公理**を満足するという．近傍系 $\mathfrak{U}$ が与えられた M において高々可算個の開集合族 $\{U'_1, U'_2, \cdots\}$ をとって，これで $\mathfrak{U}$ と同値な近傍系が与えられるとき，M は**第 2 可算公理**を満たすという．M が第 2 可算公理を満足するとき，M は**可算基**をもつという．位相空間 M が第 2 可算公理を満たすならば，第 1 可算公理をも満足する．位相空間 R^n は可算基をもつ．

命題 B.8. 位相空間 M が第 1（第 2）可算公理を満足するならば，その任意の部分位相空間は第 1（第 2）可算公理を満足する．

B.4.3　連結性

位相空間 M に対して，$M = O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \neq \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$ であるような開集合 O_1, O_2 が存在しないとき，M を**連結**であるという．N を位相空間 M の部分集合とする．N が M の部分位相空間として連結であるとき，N を M の**連結部分集合**という．

M を任意の位相空間とする．M の任意の 2 点 x, y に対して，M の連結部分集合で x, y の両方を含むようなものが存在するとき $x \sim y$ と書くことにすると，$\sim$ は M における同値関係である．

定義 B.16. M を上に定義した同値関係 $\sim$ によって類別したときの各同値類を位相空間 M の**連結成分**という．

定義 B.17. 位相空間の連結な開集合のことを**領域**という．

B.4.4 コンパクト性，局所有限性

定義 B.18. 位相空間 M の部分集合の族 $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を考える．これは 1 つの集合 Λ を考えて，その元 λ に部分集合 N_λ を対応させてつくったものである．これについて，

(a) $M=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}N_\lambda$ であるとき，$\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は M を**被覆**するという．

(b) $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が M の被覆であって，さらにすべての N_λ ($\lambda\in\Lambda$) が開集合であるとき，$\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M の**開被覆**であるという．

(c) 有限個の集合から成る被覆を**有限被覆**という．

(d) M の被覆の一部分をなす族が M の被覆になっているとき，これを $\{N_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の**部分被覆**であるという．

位相空間 M の任意の開被覆が必ず M の有限被覆をその部分被覆として含むとき，M は**コンパクト**であるという．有限個の点から成る位相空間はコンパクトである．位相空間 M の部分集合 N がコンパクトとは，相対位相に関して N がコンパクトな位相空間であること，すなわち，N の任意の（相対位相に関する）開被覆が必ず N の有限被覆を含むことをいう．

位相空間 M の部分集合 N がコンパクトであるためには次の条件が成り立つことが必要かつ十分である．条件：N の M における任意の開被覆は N の（M における）有限被覆を含む．すなわち，$N\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda$（$O_\lambda$ は M の開集合）ならば，$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ のうちから適当に有限個の集合 $O_{\lambda_1},\cdots,O_{\lambda_m}$ を取り出して $N\subset\bigcup_{i=1}^{m}O_{\lambda_i}$ とすることができる．

空間 R^n の部分集合 N がコンパクトであるための必要十分条件は，N が R^n の有界な部分集合（すなわち，$\|x\|<r,\forall x\in N$ であるような正数 r が存在する部分集合）であって，かつ閉集合であることである．すなわち，コンパクトな集合は R^n における有界な閉集合を一般化した概念である．

位相空間 M の部分集合の族 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ があって，M の任意の点 P について，その近傍 $V(P)$ であって $V(P)\cap S_\lambda\neq\emptyset$ であるような添数 λ の個数が有限であるものが存在するとき，この族 $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は**局所有限**であるという．

B.4.5　極限，連続写像，同相写像

半順序集合 $\{A; \prec\}$ において，次の条件が満足されているものとする：

任意の $\alpha, \beta \in A$ に対して，$\alpha \prec \gamma, \beta \prec \gamma$ であるような $\gamma \in A$ が存在する．

このとき，$\{A; \prec\}$（あるいは単に A）は**有向集合**であるという．自然数の集合は通例の大小関係 $<$ に関して有向集合である．位相空間 M における**有向点列**とは，ある有向集合 A を添数集合とするような M の元の族 $\{x_\alpha | \alpha \in A\}$ をいう．

$\{x_\alpha | \alpha \in A\}$ を M における有向点列，x を M の点とする．x の予め与えられた任意の基本近傍 $U(x)$ に対して，適当に $\alpha_0 \in A$ をとれば $\alpha_0 \prec \alpha$ であるようなすべての $\alpha \in A$ に対して $x_\alpha \in U(x)$ が成り立つとき，有向点列 $\{x_\alpha | \alpha \in A\}$ は点 x に**収束**する，あるいは**極限** x を有するといい，このことを $\lim_A x_\alpha = x$ と表す．Hausdorff 空間の有向点列 $\{x_\alpha | \alpha \in A\}$ は高々1 つの極限を有する．位相空間で M において M の部分集合 N が閉集合であるならば，N の有向点列の極限となるすべての点は N に属する．

定義 B.19. M_1, M_2 を 2 つの位相空間とする．写像 $f : M_1 \to M_2$ が**連続**であるとは，M_2 の任意の開集合 O_2 に対して $f^{-1}(O_2)$ が M_1 の開集合であることをいう．連続な写像を**連続写像**という．

命題 B.9. M_1, M_2 を 2 つの位相空間とする．f を M_1 から M_2 への写像とする．f に関する次の 3 つの条件は互いに同等である：

[C1]　f は連続である．

[C2]　M_2 の任意の閉集合 A_2 に対して $f^{-1}(A_2)$ は M_1 の閉集合である．

[C3]　x_1 を M_1 の任意の点とし，$x_2 \stackrel{\text{def}}{=} f(x_1)$ とする．x_2 の M_2 における任意の近傍 V_2 に対して，$f^{-1}(V_2)$ は x_1 の M_1 における近傍である．

M_1 のある 1 点 a に対して $b \stackrel{\text{def}}{=} f(a)$ とするとき，b の M_2 における任意の近傍 V_2 に対して $f^{-1}(V_2)$ が a の M_1 における近傍であるとき，f は点 a において連続であるという．

R^n から R^m への写像 f が連続であることは，R^n の任意の点 x_1 について次の条件が成り立つことと同等である：任意の正の実数 ε に対応して正の実数 $\delta(\varepsilon)$ が存在して，$\|x - x_1\| < \delta(\varepsilon)$ ならば $\|f(x) - f(x_1)\| < \varepsilon$ である．

f が R^n の点 a において連続であることは，上記の条件が $x_1 = a$ に対して成り立つことと同等である．

写像 $f : R^n \to R^m$ について，任意の正の実数 ε に対応して $x, a \in R^n$, $b \in R^m$ について正の実数 $\delta(\varepsilon)$ が存在して $\|x - a\| < \delta(\varepsilon)$ ならば $\|f(x) - b\| < \varepsilon$ であることを，$\lim_{x\to a} \|f(x) - b\| = 0$，あるいは $\lim_{x\to a} f(x) = b$ と記すことにする．この記法によれば，f が $a \in R^n$ で連続であることは，$\lim_{x\to a} \|f(x) - f(a)\| = 0$，あるいは $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ と表されることになる．

$f : M_1 \to M_2$ が連続でかつ単写であっても，逆写像 f^{-1} が連続であるとは限らない．M_i $(i = 1, 2, 3)$ を位相空間とするとき，$f : M_1 \to M_2$, $g : M_2 \to M_3$ が共に連続であれば積写像 $g \circ f : M_1 \to M_3$ も連続である．

f を位相空間 M_1 から M_2 への連続写像とし，N_1 を M_1 の部分位相空間として，$f_{N_1} \overset{\text{def}}{=} f|_{N_1}$ とおく．このとき次のことが成り立つ：(a) f_{N_1} は，N_1 から M_2 への連続写像である．(b) $f(N_1)$ を M_2 の部分位相空間と見なすと，f_{N_1} は N_1 から $f(N_1)$ の上への連続写像である．

f を位相空間 M_1 から M_2 への連続写像とする．$\{x_\alpha | \alpha \in A\}$ は M_1 における有向点列で M_1 の元 x に収束するものとする．このとき，$\{f(x_\alpha) | \alpha \in A\}$ は $f(x)$ に収束する．とくに M_2 が Hausdorff 空間ならば，$\{f(x_\alpha) | \alpha \in A\}$ の極限は $f(x)$ に限る．

M_1, M_2 を 2 つの位相空間とする．$f : M_1 \to M_2$ なる M_1 から M_2 の上への 1 対 1 写像で，f とその逆写像 f^{-1} が共に連続であるものが存在するとき，M_1 と M_2 とは**同位相**（あるいは**同相**）であるという．また，写像 f を**位相写像**（あるいは**同相写像**）という．

B.5　$\mathcal{R}^n$ 上の解析学 −逆写像定理−

$\mathcal{R}^n$ を部分節 **B.4.1** で述べた意味での Hausdorff 空間 $\{R^n; \mathfrak{U}\}$ として，解析学における逆写像定理と，それから導かれるいくつかの命題およびそれらを理解する上で必要な諸概念についてまとめておく．

B.5.1 可微分写像，微分同型写像

$\{\Delta_1,\cdots,\Delta_n\}$ を R^n の自然基底[4] とし，R^n の点 x を $x=\sum_{\nu=1}^n x^\nu\Delta_\nu$ と表す．f を R^n の開集合 U から R^m への写像とするとき，$a\in U,\ \nu=1,2,\cdots,n$ に対して

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{f(a+t\Delta_\nu)-f(a)}{t}-\frac{\partial}{\partial x^\nu}f(a)\right\|=0 \tag{B.22}$$

なる R^m の元 $(\partial/\partial x^\nu)f(a)$ が存在するとき，$(\partial/\partial x^\nu)f(a)$ を点 a における x^ν に関する f の**偏微分係数**という．$(\partial/\partial x^\nu)f(a)$ のことを $\partial_\nu f(a)$ とも表す．U の任意の点 x において，$\partial_\nu f(x)$ が存在する場合には，$x\in U$ に $\partial_\nu f(x)$ を対応させる写像 $\partial_\nu f:U\to R^m$ が存在する．このときには，上の定義を $\partial_\nu f$ に適用して点 a における x^μ に関する $\partial_\nu f$ の偏微分係数 $\partial_\mu\partial_\nu f(a)\overset{\text{def}}{=}\partial_\mu(\partial_\nu f)(a)$ を定義することができる．以下，この操作を繰り返すことにより，偏微分係数 $\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_r}f(a)\overset{\text{def}}{=}\partial_{\mu_1}(\cdots(\partial_{\mu_r}f)\cdots)(a)$ を定義することができる．

定義 B.20. f を R^n の開集合 U から R^m への写像とする．U の任意の点 x において偏微分係数 $\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_r}f(x)$ がすべての n 以下の自然数 $\mu_1,\cdots,\mu_r$ に対して存在して，x に $\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_r}f(x)$ を対応させる写像 $\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_r}f$ が連続であるとき，f は U から R^m への $\boldsymbol{C^r}$ **級の写像**であるという．ここに，r は非負の整数とする．さらに，f が任意の非負の整数に対して C^r 級の写像であるとき，f は $\boldsymbol{C^\infty}$ **級の写像**であるという．

命題 B.10. f が U から R^m への C^2 級の写像ならば

$$\partial_\mu\partial_\nu f(x)=\partial_\nu\partial_\mu f(x),\quad \forall x\in U\quad (\mu,\nu=1,2,\cdots,n) \tag{B.23}$$

である．

定義 B.21. U,V を共に R^m の開集合とする．U から V の上への 1 対 1 の写像 f が C^r 級であって，かつその逆写像 f^{-1} も C^r 級であるとき，f は U から V の上への $\boldsymbol{C^r}$ **級微分同型写像**であるという．ここに r は非負の整数または ∞ を表す．

---

[4] 第 1 章の部分節 **1.1.2** を参照．なお，部分節 **B.4.1** で述べた方針にしたがって，R^n の元を表すのにベクトルを表す矢印を省くことにする．

B.5.2 逆写像定理

命題 B.11. **(逆写像定理)** R^n の開集合 O から R^n への C^r 級 $(r \geq 1)$ 写像 $\phi : O \to R^n$ を考える．$\phi(u^1, \cdots, u^n) = (x^1(u^1, \cdots, u^n), \cdots, x^n(u^1, \cdots, u^n))$, $(u^1, \cdots, u^n) \in O$ と表すことにする．O の点 P において，Jacobi の行列

$$J \stackrel{\text{def}}{=} (J^\mu{}_\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial u^\nu}\right) \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{B.24}$$

が正則ならば，P の近傍 U と $\phi(P)$ の近傍 V で次の条件 [**A**], [**B**] を共に満足するものが存在する：

[**A**] $U \subset O$ であり，$\phi|_U$ は U から V の上への全単写であり，C^r 級である．

[**B**] $\phi|_U$ の逆写像を ψ とすると，ψ は V から R^n の中への C^r 級の写像である．また，ψ の Jacobi の行列

$$K \stackrel{\text{def}}{=} (K^\mu{}_\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial u^\mu}{\partial x^\nu}\right) \tag{B.25}$$

は J の逆行列である．

命題 B.12. O を R^n の開集合とし，$\phi : O \to R^n$ を O から R^n への C^r 級の写像とする．ϕ が単写であって O のすべての点において (B.24) で定義される Jacobi の行列 J が正則であるならば，$V \stackrel{\text{def}}{=} \phi(O)$ は R^n の開集合であって ϕ は O から V の上への C^r 級微分同型写像である．

命題 B.13. R^n の原点を $o^n = (0, \cdots, 0)$ とする．O を R^n における o^n の近傍として，$\phi : O \to R^m$ $(m > n)$ を $\phi(o^n) = o^m$ でありかつ行列

$$L \stackrel{\text{def}}{=} (L^\mu{}_\nu) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial u^\nu}\right) \qquad (\mu = 1, 2, \cdots, m,\ \nu = 1, 2, \cdots, n) \tag{B.26}$$

の点 o^n における階数が n であるような C^r 級写像とする．このとき，R^m における o^m のある 2 つの近傍 U, V について，U から V の上への C^r 級微分同型写像 ψ であって，次の条件 [**a**], [**b**] を共に満足するものが存在する：

[**a**] $\psi(o^m) = o^m$

[**b**] R^n の原点 o^n のある近傍 O' 上で $(\psi \circ \phi)(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^n, 0, \cdots, 0)$ である．

補足的論考

最後に，真空の誘電率 ε_0，真空の透磁率 μ_0 と計量との関係，電磁場を記述する基礎的場は何か，特殊相対論と一般相対論の関係などについて若干の論考を加えておく．本文中で説明しなかった用語，概念も現れるが，それらに関してはゲージ理論，幾何学，一般相対論等の文献をご覧頂きたい．

1. 第 4 章の **4.1** 節においては，Newton 力学と電磁気学の考察をする際，「物理的空間は向き付けられた 3 次元 Euclid 空間である」ことを前提として議論が展開されているが，法則の内容自身は空間の向き付けには依存しない．また，電磁場の基礎方程式 (4.36) および連続の方程式 (4.38) は，そこに現れる諸量の導入の経緯を無視すれば，それ自体としては計量が定義されていなくても数学的に意味のある式である．一方，真空中での D と E の関係，B と H の関係を与える (4.41) は計量に直接に依存している．この (4.41) を前提として波動方程式 (4.55), (4.63)，(4.68) および (4.72) を導き，これらの方程式から「時間と空間を合わせたものとしての Minkowski 時空」を読み取ったのであった．ここでは，3− 形式 ε_0，μ_0 が中核的役割を担っている．**真空の誘電率 ε_0 と透磁率 μ_0 は時間−空間の計量に深く関わっている**のである．Hehl, Obukhov 等は，**電磁気学を任意の 4 次元多様体の上で定式化し** (E, B) **と** (H, D) **間の線型関係を前提として時空の計量を導出する**など，電磁気学の法則と時空構造の関係について興味深い研究を進めている[a]．
2. 「電磁場を表す基礎的な場は何か」ということについて考えてみよう．3 次元形式において，電磁場を記述する量としては 1− 形式 E, H，2− 形式 D, B があり，電磁場の基礎方程式は (4.36) で与えられる．また，

[a] 文献 [26] とそれに続く同著者等による論文を参照．

ベクトルポテンシャル $A^{(3)}$，スカラーポテンシャル φ が存在して，E, B は (4.39) と表示される．真空中では E, H, D, B の間には (4.41) の関係があり，これらは独立な場ではない．4 次元形式においては，電磁場の基礎方程式は，E, B, H, D と (4.151)，(4.152) の関係にある $F, \tilde{F}$ を用いて，(4.154) で与えられ，3 次元形式における (4.39)，(4.41) の内容は，それぞれ (4.155)，(4.164) で表される．

ところで，古典的物質が関わる限りでは，4 次元的 1− 形式 A（あるいは $A^{(3)}$，φ）は直接には観測されず，$F = dA$（あるいは $E = -d\varphi - \partial A^{(3)}/\partial t$, $B = dA^{(3)}$）が電磁力を与え[b)]，これが直接的物理的意味をもつのであった．A は古典理論のレベルでみる限り，「数学的にその存在が示されている補助的な場」に過ぎないが，荷電量子場が関わる場面では事情が異なって，第 4 章の脚注 23) で述べたように，場 $A^{(3)}$, φ（したがって A）は Aharonov-Bohm 効果を通じてその実在性が確認されており，また，より基礎的な理論であるゲージ理論にあっては，**A が電磁場を表す基礎的な場ということになる**[c)]．ゲージ理論の観点からは，**「古典的物質のみが関わる場面では F（あるいは E, B）が基礎的な場の量であり，$\tilde{F}$（あるいは H, D）は補助的な場と見なされるのが妥当」**といえよう[d)]．これは，「$\mathbf{E}, \mathbf{B}$ が電磁場を記述する基礎的な場である」とする文献 [12] の主張と調和する．

3. 電磁場中の点電荷に作用する電磁力 $\vec{f}(P)$ は 4 元速度と場の値の演算積で表されていて，これは 4 元速度と直交する．このことから「点電荷の質量は時間的に一定である」ことが理論的に帰結するのであった．さらにゲージ理論の観点からは，Lorentz 力は電気量を帯びた物質場と場 A との極小相互作用の自然な結果として説明される．Lorentz 力の表示 (4.28) は電磁気学の 3 次元形式の枠内で考える限りでは，「根拠不明だが事実としてそうなっている」という他ないが，特殊相対論や

b) (4.207)（あるいは (4.28)）を参照．

c) 微分幾何学の言葉で表現すれば，「1− 形式 A は Minkowski 時空上の 1 次元ユニタリ群 $U(1)$ を構造群とする主ファイバー束の**接続形式**を与え，2− 形式 F はその**曲率形式**を与える場」ということになる．この A のように，物理学においては，ある段階の理論では補助的概念に過ぎないものが，より進んだ理論においては基本的位置を占めている例は多い．

d) 第 4 章で波動方程式を論ずる際，E, B, F に対する方程式 (4.55)，(4.63)，(4.167) に重きをおいた書き方をしたのは，この点を意識してのことである．

ゲージ理論の観点からは極めて自然なものとして捉えることができるのである．**「Lorentz 力のように古くから知られている事実の中にも自然の奥深い法則の片鱗が垣間見えている」**といえよう．

4. Newton 力学においては，重力は遠隔作用をするものとして万有引力の理論によって記述されている．特殊相対論の枠内で重力を記述する試みもあったが，これらは皆失敗に終わり，現在では重力を記述する標準的な理論は一般相対論である．この理論においては，時空は Lorentz 計量が定義され，曲率テンソル場が **Riemann-Christoffel の曲率テンソル場**である 4 次元多様体であり，**Lorentz 空間**（あるいは擬 Riemann 空間）とよばれるものである．そこでは，**曲率テンソル場**が重力場を記述するものとされている．曲率テンソル場が全時空至るところで 0 と見なせる場合，すなわち物質が存在することによってその周囲に生ずる重力場のような真の重力場を無視できる場合には，一般相対論は特殊相対論に帰着する．一般相対論において時空全体を覆う正規直交座標系が存在するのは，曲率テンソル場が全時空至るところで 0 のとき，かつそのときに限る．その意味で，**全時空を覆う正規直交座標系の存在は一般相対論の特別な場合としての特殊相対論を特徴付ける．**

特殊相対論の入門書の多くでは，Minkowski 時空を前提として，

特殊相対性原理：物理法則はすべての慣性系（本書でいう時間的に正の正規直交座標枠 $[O;(\vec{E}_0,\vec{E}_1,\vec{E}_2,\vec{E}_3)]$）において同一である．

を基本原理の 1 つとして特殊相対論が定式化されている．この「特殊相対性原理に基づく定式化」においては非慣性系は理論の枠外になっており[e]，その結果「加速度系（= 時空に対して加速度運動をしている系）で観測すると**慣性力**（= 見かけの重力）が現れるが，特殊相対論では加速度系は扱えない．したがって，慣性力は特殊相対論では扱えず一般相対論によって初めて記述される」とか「双子のパラドックスの解決のためには，一般相対論が必要である」という誤った主張がなされることがある[f]．**特殊相対論と一般相対論の違いは，時空の曲率テンソル場を 0 と見なせるか見なせないか，すなわち，真の重力を**

[e] 命題 1.2.13 に続く記述および命題 3.5.2 に続く記述を参照．なお，「特殊相対性原理 $\neq$ 特殊相対性理論」である．両者を混同しないように．

[f] 命題 4.2.2 とそれに続く記述を参照．

無視できるかできないかにあるのであって，座標系として一般の座標系をとれないかとれるか，という点にあるのではではない．どちらの理論においても座標系としては任意のものがとれるのである[g]．慣性力は一般相対論を建設する際に重要な手がかりになったが，このことは「慣性力は特殊相対論では扱えない」ことを意味しない．実際，第4章の最後の部分で述べたように，**特殊相対論においても加速度系をとって物体の運動を記述することが可能であり，この系においては慣性力が現れる**こととなる[h]．周知のように，Newton 力学においては運動の加速度系による記述が可能である．もし，「特殊相対論では運動の加速度系による記述は不可能である」のならば，この理論はその点において Newton 力学よりも後退した理論であることになってしまう．

特殊相対性原理は特殊相対論の創成期に大きな役割を果たしたが，基底無依存，座標系無依存な定式化が可能な現代にあっては，この原理の存在意義は無く，むしろ有害である．本書では，**“時空は Minkowski 時空であることと一般相対性原理に基づく特殊相対論の定式化”** を与えた[i]．ここでは，**物理量および物理法則は基底（座標系）に依存しない絶対的，普遍的意味をもっている**ことが顕現している．Einstein 自身もいうように相対性理論という名称は不適切であり，**絶対性理論** [18]，**普遍性理論**あるいは**不変性理論**などとよばれるべきものである．

5. Newton 力学における時間と空間はいずれも物体の存在や運動に影響されないという意味で**絶対時間，絶対空間**である．特殊相対論における Minkowski 時空は物体，場の存在や運動，変動に影響されないという意味で**絶対時空**である．一般相対論においては，時空と物体，場とは相互に動力学的に規定しあう関係にある．
6. Euclid 空間，Minkowski 空間，Lorentz 空間は，いずれもより広い概念である**計量擬似接続空間**（＝計量と擬似接続を備えた多様体）の特殊な例である．計量擬似接続空間では一般に**振率テンソル場**も曲率テンソル場も 0 ではない．Lorentz 空間は，**計量条件**が満足され，かつ

---

g) ここでは，局所座標系のことを単に座標系とよんでいる．なお，1 つの座標近傍が時空全体を覆うとは限らないことに注意．第 5 章部分節 **5.2.2** を参照．

h) この力が真の重力ではないことは Minkowski 時空の曲率テンソル場が全時空至るところで 0 であることから明らかである．

i) 第 4 章の脚注 37) を参照．なお，**「一般相対性原理 $\neq$ 一般相対性理論」**である．

捩率テンソル場が 0 であるような計量擬似接続空間である．また，計量擬似接続空間としての Euclid 空間（Minkowski 空間）は「Euclid 計量（Minkowski 計量）が定義され，かつ計量条件が満足されていて捩率テンソル場が 0 であるアフィン空間[j]」である．一般相対論以外にも，計量擬似接続空間に基づく種々の重力理論が提唱されている．この辺りのことについて述べたものとして，雑誌「数理科学」における著者による小論 [27] とそこで引用されている文献がある．

7. 電磁場のエネルギー運動量密度，4 次元角運動量密度は，それぞれ反変ベクトル場値 3– 形式（＝1 階反変 3 階交代共変テンソル場），2 階交代反変テンソル場値 3– 形式（＝2 階交代反変 3 階交代共変テンソル場）であることになった．場としては，スカラー場，スピノル場，内部対称性の非可換ゲージ場などもあるが，これらの場のエネルギー運動量密度，4 次元角運動量密度も，それぞれ反変ベクトル場値 3– 形式，2 階交代反変テンソル場値 3– 形式であり，これらの場の共存系についても「空間的超曲面の任意の有界領域でのエネルギー運動量，4 次元角運動量」が定義され，理論は整合性を保っている．一方，一般相対論の標準的定式化においては，重力場のエネルギー運動量密度，4 次元角運動量密度を 3– 形式として定義することはできず，したがって「空間的超曲面の任意の有界領域での重力場のエネルギー運動量，4 次元角運動量」は定義されない．「重力場のエネルギー運動量密度，4 次元角運動量密度は，それぞれ反変ベクトル場値 3– 形式，2 階交代反変テンソル場値 3– 形式であるべきである」という要請は重力理論を定式化する際の 1 つの指針になるものと思われる [27]．

8. 特殊相対論は古典電磁気学の理論的整備を契機として生まれたといってよい．光は電磁場の一形態であるが，黒体輻射，光電効果等を通じて量子力学を生み，電磁場の理論はゲージ理論の原型を具現しているなど物理学の発展の諸段階において重要な鍵として機能してきた．電磁現象は時空の Minkowski 的構造，自然のゲージ的構造，量子論を示唆し，また重力現象は時空の非平坦性を教えている．電磁場と重力場は共に自然の構造について極めて豊かな情報を与えてくれる存在である．

---

j) このとき曲率テンソル場は 0 であることが帰結する．

参考文献

[1] 横沼健雄：「テンソル空間と外積代数」（岩波講座 基礎数学 線型代数 iv，岩波書店，1977）

[2] 有馬 哲・浅枝 陽：「ベクトル場と電磁場」（東京図書，1987）

[3] 有馬 哲，ほか：「ミンコフスキー空間と特殊相対性」（東京図書，1993）

[4] 前原昭二：「線形代数と特殊相対論」（入門｜現代の数学 [4]，日本評論社，1981）

[5] 栗田 稔：「微分形式とその応用」（現代数学セレクト ④，現代数学社，1973）

[6] 小玉英雄：「相対性理論」（物理学基礎シリーズ 6，培風館，1997）

[7] 杉浦光夫：「解析入門 I」（基礎数学 2，東京大学出版会，1980）

[8] 萩上紘一：「多様体」（共立講座 21 世紀の数学 6，共立出版，1997）

[9] 松本幸夫：「多様体の基礎」（基礎数学 5，東京大学出版会，1988）

[10] 畠山洋二：「多様体入門」（数学ライブラリー 41，森北出版，1976）

[11] 松島与三：「多様体入門」（数学選書 5，裳華房，1965）

[12] 太田浩一：「電磁気学 I」（丸善物理学基礎コース，丸善，2000）

[13] 太田浩一：「電磁気学 II」（丸善物理学基礎コース，丸善，2000）

[14] 太田浩一：「マクスウェル理論の基礎 相対論と電磁気学」(東京大学出版会，2002)

[15] 砂川重信：「理論電磁気学（第3版)」(紀伊國屋書店，1999)

[16] 鐸木康孝：「理工系物理学」(開成出版，1979)

[17] 「鐸木康孝論文集」(鐸木康孝論文集刊行会 編集・発行，1981)

[18] 新井朝雄：「物理現象の数学的諸原理 ー現代数理物理学入門ー」(共立出版，2003)

[19] 砂田利一：「数学から見た物体と運動」(岩波講座 物理の世界 物の理 数の理 1，岩波書店，2004)

[20] 砂田利一：「数学から見た古典力学」(岩波講座 物理の世界 物の理 数の理 2，岩波書店，2004)

[21] 砂田利一：「数学から見た連続体の力学と相対論」(岩波講座 物理の世界 物の理 数の理 3，岩波書店，2004)

[22] G.L. Naber：「*The Geometry of Minkowski Spacetime*」(Applied Mathematical Sciences 92, Springer-Verlag, 1992)

[23] J.J. キャラハン：「時空の幾何学 特殊および一般相対論の数学的基礎」(樋口三郎 訳，シュプリンガー・フェアラーク東京，2003)

[24] E. Schrödinger：「*Space-Time Structure*」(Cambridge University Press, Cambridge, 1950)

[25] 内山龍雄：「一般相対性理論」(裳華房，1978)

[26] F.W. Hehl and Y.N. Obukhov：「*Foundations of Classical Electrodynamics Charge, Flux, and Metric*」(Progress in Mathematical Physics, Birkhäuser Boston, 2003)

[27] 河合俊治：「計量擬似接続空間」(「数理科学」特集 空間概念と物理学 第39巻11号 掲載記事，サイエンス社，2001年11月)

索 引

ソ

ト

ナ

ニ

著者略歴

河合俊治（かわいとしはる）

1938年 千葉県生まれ．1966年 東京教育大学大学院理学研究科物理学専攻博士課程修了（理学博士）．大阪市立大学理学部助手，講師，助教授，教授，大阪市立大学大学院理学研究科教授を経て，現在 大阪市立大学名誉教授．

特殊相対性理論の数学的基礎

2005年11月25日　第1版発行

検印省略

定価はカバーに表示してあります．

著者		河合俊治
発行者		吉野達治
発行所	〒102-0081東京都千代田区四番町8-1 電話 03-3262-9166～9 株式会社 裳華房	
印刷所	中央印刷株式会社	
製本所	株式会社 青木製本所	

社団法人 自然科学書協会会員

ISBN 4 - 7853 - 2913 - 0